Aplicaciones del Teorema de Green

Área como Integral Curvilínea

Sea D una región simplemente conexa con borde C liso a trozos. El área A de la región D es igual a la integral

$$A = \frac{1}{2}\int_C -y \ \ dx + x \ \ dy$$

Demostración. Sea $F(x, y) = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$. Como F es continuamente diferenciable en D, se puede aplicar el Teo. de Green.

$$\int_C -y \ \ dx + x \ \ dy = \int\int_D \frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y) \ \ dA = \int\int_D 2 \ \ dA = 2A$$

$$\therefore \quad A = \frac{1}{2}\int -y \ \ dx + x \ \ dy$$ □

Este resultado suministra otra técnica mas para hallar el área de una región, especialmente cuando la frontera esta dada en forma paramétrica.
Sea $\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, dada por $\lambda(t) = [x(t), y(t)]$ una trayectoria de clase c^1 que parametriza la frontera de una región R positivamente. Si tomamos el campo $F(x, y) = (0, x)$ se obtiene según Green

$$\int\int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\ dy = \int\int_R \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y}\right) dx\ dy = \int\int_R dx\ dy = \int\int_R dx\ dy = \acute{A}rea\ R$$

Por otro lado

$$\int_{Fr(R)} F = \int_{Fr(R)} F(x(t), y(t)) \cdot (0, 1)dt = \int_{Fr(R)} x(t) \cdot y'(t)\ dt$$

por lo tanto

$$\acute{A}rea\ R = \int_{Fr(R)} x(t) \cdot y'(t)\ dt$$

Ejemplo Calcular el área encerrada por la curva $\lambda : [-2, 2] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\lambda(t) = [t^3 - 4t, t^2 - 4]$

Solución Usando la fórmula encontrada

$$\int_{Fr(C)} (t^3 - 4t)(t^2 - 4)'dt = \int_{-2}^{2} (t^3 - 4t)(2t)dt = \int_{-2}^{2} 2t^4 - 8t^2 dt = \frac{256}{15}$$

Formas alternativas del teorema de Green

Si F es un campo vectorial en el plano, se puede escribir $F(x,y,z) = M\hat{\imath} + N\hat{\jmath} + K0$ y al calcular el rotacional

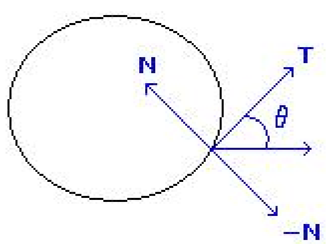
$$rotF = V \times F = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & K \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial N}{\partial z}\hat{\imath} + \frac{\partial M}{\partial z}\hat{\jmath} + \left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] K$$

$$\therefore \quad (rotF) \cdot K = \left[-\frac{\partial N}{\partial z}\hat{\imath} + \frac{\partial M}{\partial z}\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) K\right] \cdot K = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

$\therefore$ Una forma vectorial del teorema de Green

$$\int\int_R \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \quad dA = \int_C F \cdot dR = \int\int_R rotF \cdot K \quad dA$$

La extensión de esa forma vectorial del teorema de Green a superficies en el espacio se conoce como el teorema de Stokes. Otra forma vectorial el teorema de Green



Sea $r(S) = x(S)\hat{\imath} + y(S)\hat{\jmath}$
$\therefore r'(S) = x'(S)\hat{\imath} + y'(S)\hat{\jmath}$
Y el vector normal se puede escribir como
$-y'(S)\hat{\imath} + x'(S)\hat{\jmath} = N(S)$
$y'(S)\hat{\imath} - x'(S)\hat{\jmath} = N(S)$

Entonces al $F(x,y) = M\hat{\imath} + N\hat{\jmath}$ se le aplica el teorema de Green para obtener

$$\int_C F \cdot N \quad dS = {}_a^b\, (M\hat{\imath} + N\hat{\jmath}) - (y'(S)\hat{\imath} - x'(S)\hat{\jmath}) \quad dS = \int_a^b M\frac{\partial y}{\partial S} - N\frac{\partial x}{\partial S} \quad dS = \int_C M \ dy - N \ dx = \int_C -N \ dx + M \ dy = \int\int_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) \quad dA = \int\int_R divF \quad dA$$

$$\therefore \quad \int_C F \cdot N \quad dS = \int \int_R div \ F \quad dA$$

La generalización de esta forma a tres dimensiones se llama Teorema de la divergencial (Gauss).