Guia Segundo Exámen Parcial Cálculo Diferencial e Integral IV

1.-Un alambre tiene la forma de la curva $\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), t)$ con $t \in [-1, 1]$ calcule su masa si la densidad en un punto (x, y, z) del alambre esta dada por la función $f(x, y, z) = 1 - z^2$

2.-Pruebe que la integral

$$\int_\gamma (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy$$

es independiente de la trayectoria que une los puntos $(1, 2)$ con $(3, 4)$ y calcule el valor de la integral utilizando la función potencial.

3.-Calcule el área de la región en $\mathbb{R}^2$ encerrada dentro de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

usando el teorema de Green 4.-Calcular $\int_\Gamma f$ (Integral de línea de funciones escalares) en cada inciso

(a) Γ es el triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ y γ es una parametrización que la recorre en este orden y $f(x, y, z) = x + y + z$

(b) Γ es el segmento de la parábola $y = \frac{x^2}{4}$ entre los puntos $(0, 0)$, $(4, 4)$ y $f(x, y) = x - y^2$

(c) Γ es la parte de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ que esta en el semiplano derecho; γ es una parametrización que la recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando la vemos desde el origen y

$$f(x, y) = \left(\frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(d) Γ es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $y + z = 1$; γ es una parametrización que la recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando la vemos desde el origen, y $f(x, y, z) = xz + yz + xy$

5.-Calcule el área de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ que está entre los planos $z = 0$ y $z = x + y + 2$

6.-Calcular $\int_\Gamma F$ (Integral de línea de funciones vectoriales) en cada inciso

(a) $F(x, y, z) = (y, -x, z)$ y Γ es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $y + z = 1$. La parametrización γ debe ser tal, que vista desde el origen, recorre a Γ en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

(b) $F(x, y, z) = (y, (1 - x)y, y^2z)$ y Γ es la intersección del hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el cilindro $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. La parametrización γ debe ser tal que, vista desde el origen, recorre a Γ en el sentido contrario al de las manecillas del reloj

7.-Considere el siguiente campo vectorial

$$F(x, y) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2}\right)$$

definido en $\mathbb{R} - \{(0, 0)\}$. Verifique que

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

y considere la curva $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$ que ocurre con

$$\int_\Gamma F$$

8.-Sea $F(x, y, z) = (2xyz + \operatorname{sen}(x), x^2z, x^2y)$. Hallar una función f tal que $\nabla f = F$