**Definición 1.** *$R$ es un restángulo en $\mathbb{R}^n$ si es un conjunto de la forma*

$$R = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

*donde cada $[a_i, b_i]$ es un intervalo cerrado de números reales.*
*Al número*

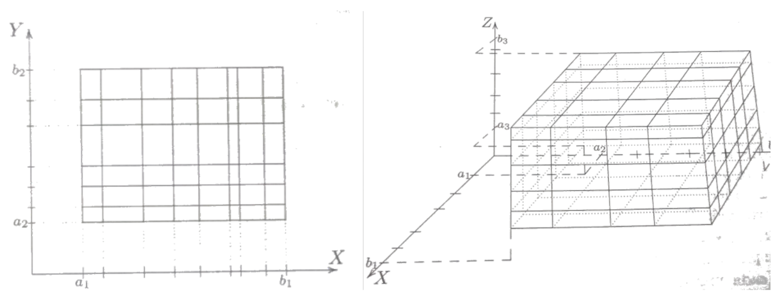
$$d(R) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2}$$

*lo llamaremos la diagonal de $R$.*
*Al número*

$$m(R) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$$

*se le llamará medida de $R$.*

Se tiene que $m(R) \geq 0$ y en el caso de $\mathbb{R}^2$ esta medida es el área de R, mientras que en $\mathbb{R}^3$ esta medida es el volumen de R.
Dado un rectángulo $R \subset \mathbb{R}^2$ ó $R \subset \mathbb{R}^3$ existen muchas formas de subdividirlo, trabajaremos con aquellas particiones que se obtienen de hacer subdivisiones en cada uno de los intervalos $[a_i, b_i]$

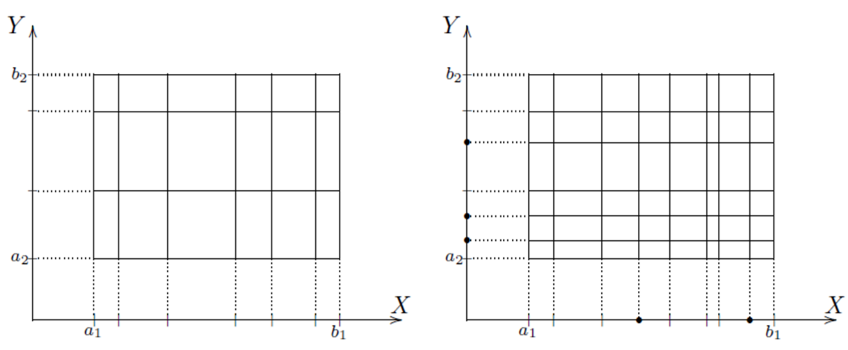



**Definición 2.** *Sea $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Si $P_i$ es una partición del intervalo $[a_i, b_i]$ para cada $i = 1, ..., n$ decimos que*

$$P = P_1 \times \cdots \times P_n$$

*es una partición de $R$*

**Definición 3.** *Sean $P$ y $Q$ dos particiones de $R$, con $P = P_1 \times \cdots \times P_n$ y $Q = Q_1 \times \cdots \times Q_n$. Decimos que $Q$ refina a $P$ si $P_i \subset Q_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$*



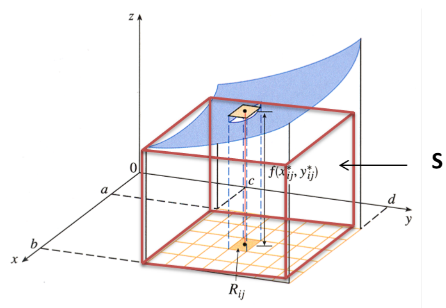

Una partición y un refinamiento de ella

Dada una función de dos variables que está definida sobre el rectángulo cerrado

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

suponiendo que $f(x, y) \geq 0$. La gráfica de f es una superfície con ecuación $z = f(x, y)$. Sea S el sólido que esta encima de R y debajo de la gráfica de f, es decir

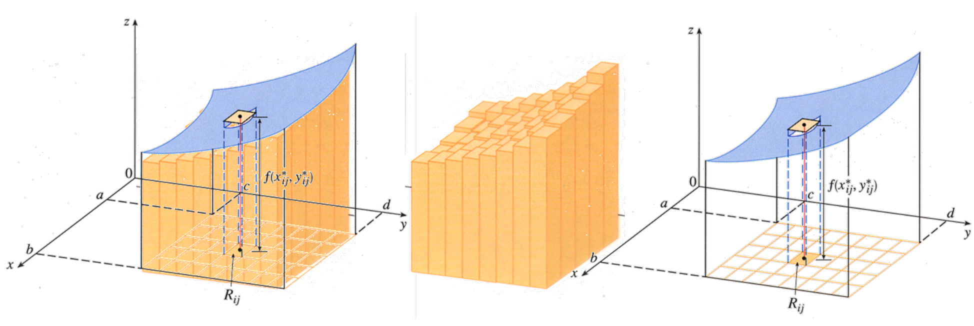
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}$$




El volumen en este caso de S es una aproximación al volumen por debajo de la superficie
-Ahora bien si dividimos el rectángulo R en subrectángulos
Para el intervalo [a,b] tenemos m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ con una longitud de $\Delta_x = \frac{b-a}{m}$
Para el intervalo [c,d] tenemos n subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ con una longitud de $\Delta_y = \frac{d-c}{n}$
Al trazar rectas paralelas a los ejes coordenados a través de los puntos extremos de las particiones formamos los subrectángulos

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

cada uno con un área igual a $\Delta A = \Delta_x \Delta_y$. Si elegimos un punto muestra $(x_i^*, y_j^*)$ en cada $R_{ij}$, entonces podemos aproximar la parte de S que esta encima de cada $R_{ij}$ mediante una caja rectángular delgada con base $R_{ij}$ y altura $f(x_i^*, y_j^*)$

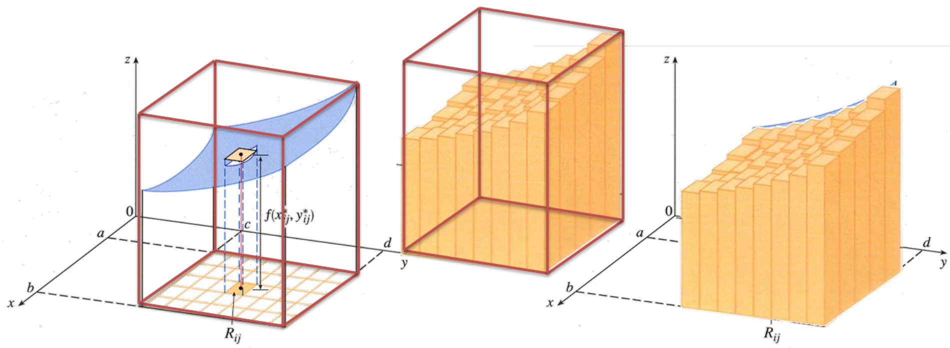



El volúmen de la caja es el producto del área de su base por su altura, por lo tanto una aproximación al volúmen de S es:

$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*) \Delta A$$

Con un desarrollo analogo para un conjunto S el sólido que esta encima de R y encima de la gráfica de f, es decir

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq f(x, y) \leq z \mid (x, y) \in R\}$$



Obtenemos también una aproximación al volumen que se encuentra por debajo de la superficie
Si consideramos ahora $M_{ij} = sup\{f(x_i, y_j)\}$ y $m_{ij} = \acute{i}nf\{f(x_i, y_j)\}$ con $(x_i, y_j) \in R_{ij}$ podemos deducir que

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \Delta R_{ij} \leq V(S) \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} \Delta R_{ij}$$

**Definición 4.** *Sean f una función (de valores reales) definida y acotada sobre un rectángulo R contenido en $\mathbb{R}^n$ y P una partición de R. Si $R_{ij}$, $i = 1, .., m$, $j = 1, ..., n$ son los subrectángulos de R inducidos por la partición P, definimos la suma inferior de f correspondiente a la partición P denotada por $\underline{S}(f, p)$ como*

$$\underline{S}(f, p) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \Delta R_{ij}$$

*Analogamente definimos la suma superior de f correspondiente a la partición P denotada por $\overline{S}(f, p)$ como*

$$\overline{S}(f, p) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} \Delta R_{ij}$$

Estas sumas tienen una serie de propiedades

**Proposición 1.** *Si P es cualquier partición de R, entonces*

$$\underline{S}(f, P) \leq \overline{S}(f, P)$$

*Demostración.* Ejercicio de la tarea 1 □

**Proposición 2.** *Si $P, Q \in P_R$ (Particiones del rectángulo R). Si Q refina a P entonces*

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(f, Q) \quad y \quad \overline{S}(f, Q) \leq \overline{S}(f, P)$$

*Demostración.* Ejercicio de la tarea 1 □

**Proposición 3.** *Si $P$ y $Q$ son cualesquiera dos particiones del rectángulo $R$ entonces se cumple*

$$\underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,Q)$$

*Demostración.* Ejercicio de la tarea 1 □

Denotaremos por $\underline{S}(f)$ al conjunto de todas las sumas inferiores de una función f (Definida sobre el rectángulo R) y como $\overline{S}(f)$ al conjunto de todas las sumas superiores es decir

$$\underline{S}(f) = \{\underline{S}(f,P) \mid P \in P_R\}$$

$$\overline{S}(f) = \{\overline{S}(f,P) \mid P \in P_R\}$$

**Definición 5.** *Al supremo del conjunto $\underline{S}(f)$ lo llamamos integral inferior de $f$ sobre $R$ y se puede denotar $\underline{\int}_R f$. Y al ínfimo del conjunto $\overline{S}(f)$ lo llamamos integral superior de $f$ sobre $R$ y podemos denotar $\overline{\int}_R f$*

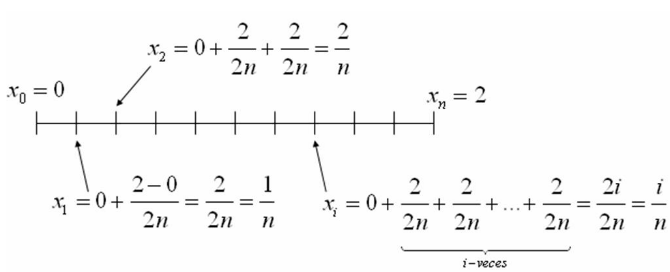
**Definición 6.** *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada sobre el rectángulo $R$. Decimos que $f$ es integrable según Riemann sobre $R$ si se tiene que la integral inferior y la integral superior de $f$ sobre $R$ son iguales. Es decir*

$$\underline{\int}_R f = \overline{\int}_R f$$

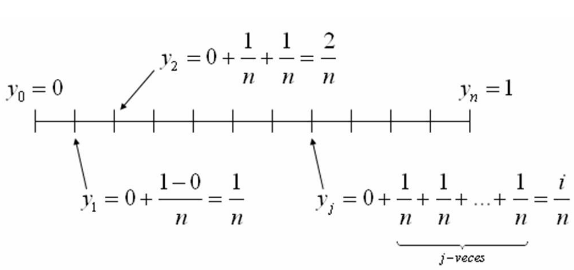
*En este caso, a este número lo llamaremos la integral de $f$ y lo denotarremos por $\int_R f$*

**Ejemplo** Calcular $\underline{\int}_R f$ y $\overline{\int}_R f$ para $f(x,y) = x + 4y$ y $R = [0,2] \times [0,1]$

**Solución** Tenemos que para $[0,2]$ consideramos una partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ con longitud $\frac{2-0}{2n} = \frac{1}{n}$




de esta manera se tiene que $x_i = \frac{i}{n}$ y $x_{i-1} = \frac{i-1}{n}$.
Mientras que para $[0,1]$ consideramos una partición $P = \{y_0, y_1, ..., y_n\}$ con longitud $\frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ de esta manera se tiene que $y_j = \frac{j}{n}$ y $y_{j-1} = \frac{j-1}{n}$.



$\therefore$ Para todo rectángulo $R_{ij}$, $M_{ij} = sup\{f(x_{i,j})|x_{ij} \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\} = x_i + 4y_j$ y $m_{ij} = sup\{f(x_{i,j})|x_{ij} \in [x_{i-1}, x : i] \times [y_{j-1}, y_j]\} = x_{i-1} + 4y_{j-1}$ $\therefore$

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{n}(x_{i-1} + 4y_{j-1})\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n} + 4\frac{j-1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n^2}\right)\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{i-1}{n} + 4\frac{j-1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n^3}\right)\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{n} i+4j-5 = \left(\frac{1}{n^3}\right)\sum_{i=1}^{2n} n(i-5)+4\left(n\left(\frac{n+1}{2}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n^2}\right)\sum_{i=1}^{2n}(i-5) + 2(n+1) = \left(\frac{1}{n^2}\right)\sum_{i=1}^{2n} i + 2n - 3 = \left(\frac{1}{n^2}\right)\left(2n(2n-3) + \frac{2n(2n+1)}{2})\right) =$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)(2(2n-3) + 2n + 1) = \left(\frac{1}{n}\right)(4n - 6 + 2n + 1) = \left(\frac{1}{n}\right)(6n-5) = 6 - \frac{5}{n}$$

$\therefore$

$$\underline{\int}_R f = sup\{\underline{S}(f,P)\} = \lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,P) = \lim_{n\to\infty} 6 - \frac{5}{n} = 6$$

Ahora bien para $\overline{\int}_R$ se tiene que:

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{n}(x_i + 4y_j)\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{i}{n} + 4\frac{j}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n^3}\right)\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{n}(i+4j) = \left(\frac{1}{n^3}\right)\sum_{i=1}^{2n} ni+4\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \left(\frac{1}{n^3}\right)\left(n\left(\frac{2n(2n+1)}{2}\right) + 2n\left(\frac{4n(n+1)}{2}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n^3}\right)(2n^3 + n^2 + 4n^3 + 4n^2) = 2 + \frac{1}{n} + 4 + \frac{4}{n} = 6 + \frac{5}{n}$$

$\therefore$

$$\overline{\int}_R f = inf\{\overline{S}(f,P)\} = \lim_{n\to\infty}\overline{S}(f,P) = \lim_{n\to\infty} 6 + \frac{5}{n} = 6$$