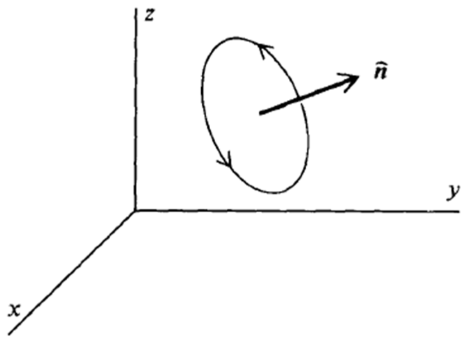
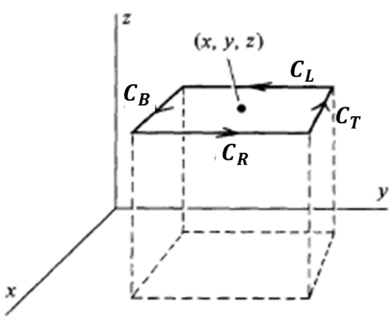
El rotacional como límite de una integral de línea

Sea $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ y R un rectángulo paralelo a alguno de los planos cuyo centro es (x_0, y_0, z_0). Si una fueraza F golpea a este rectángulo en un punto de su borde, el movimiento producido sobre el rectángulo es de rotación respecto a un vector normal $\hat{n}$



Dado el campo vectorial $F = (P, Q, R)$ y un punto (x, y, z) que se encuentra en el dominio del campo, necesitamos calcular la circulación (rotacional) del flujo de un fluido sobre el campo F en el punto P. Para ello vamos a definir una rectángulo paralelo al plano XY alrededor del punto, en este caso



Cuyos lados se pueden parametrizar

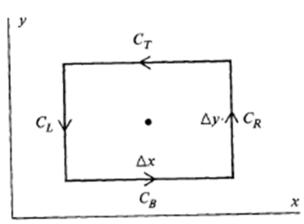
$$C_B = [x_0 + t, y_0 - h, z_0], \quad t \in [-h, h]$$

$$C_R = [x_0 + h, y_0 + t, z_0], \quad t \in [-h, h]$$

$$C_T = [x_0 - t, y_0 + h, z_0], \quad t \in [-h, h]$$

$$C_L = [x_0 - h, y_0 - t, z_0], \quad t \in [-h, h]$$

En este caso para los lados paralelos al eje X se tiene



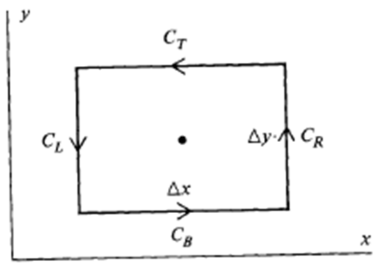
$$\begin{aligned}
\int_{C_B} F &= \int_{C_B} F\left(x_0 + t, y_0 - h, z_0\right) \cdot (1, 0, 0)\ dt \\
&= P\left(x_0 + \epsilon_x, y - h, z_0\right) 2h \\
\int_{C_T} F &= \int_{C_B} F\left(x_0 - t, y_0 + h, z_0\right) \cdot (-1, 0, 0)\ dt \\
&= -P\left(x - \epsilon_x, y + h, z_0\right) 2h
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_{C_B + C_T} F = \left(-P\left(x - \epsilon_x, y + h, z_0\right) + P\left(x_0 + \epsilon_x, y - h, z_0\right)\right) 2h$$

$$= \left(-\frac{\partial P}{\partial y}(x_0+\epsilon, y_0+\epsilon_y, z_0) \right) 4h^2$$

Ahora bien



$$\int_{C_L} F = \int_{C_L} F\left(x_0-h, y_0-t, z_0\right)\cdot(0,1,0)\; dt$$

$$= Q\left(x_0-h, y_0-\epsilon_y, z_0\right) 2h$$

$$\int_{C_R} F = \int_{C_R} F\left(x_0+h, y_0+t, z_0\right)\cdot(-1,0,0)$$

$$= -Q\left(x_0+h, y_0+\epsilon_y, z_0\right) 2h$$

Por lo tanto

$$\int_{C_L+C_R} F = Q\left(x_0-h, y_0-\epsilon_y, z_0\right) = \frac{\partial Q}{\partial x}\left(x_0+h, y_0+\epsilon_y, z_0\right) 4h^2$$

Sumando todo lo anterior

$$\int_{C_B+C_T} F + \int_{C_L+C_R} F = \left(\left(-\frac{\partial P}{\partial y}(x_0+\epsilon, y_0+\epsilon_y, z_0) \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\left(x_0+h, y_0+\epsilon_y, z_0\right) \right) \right) 4h^2$$

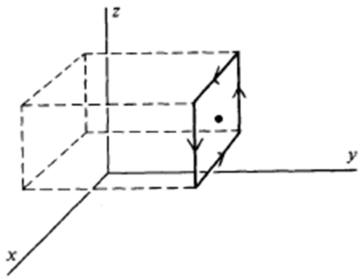
De manera que

$$\lim_{\acute{a}rea \to 0} \frac{1}{\acute{a}rea(R)} \oint F = \lim_{\acute{a}rea \to 0} \frac{\left(\left(-\frac{\partial P}{\partial y}(x_0+\epsilon, y_0+\epsilon_y, z_0) \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\left(x_0+h, y_0+\epsilon_y, z_0\right) \right) \right) 4h^2}{4h^2}$$

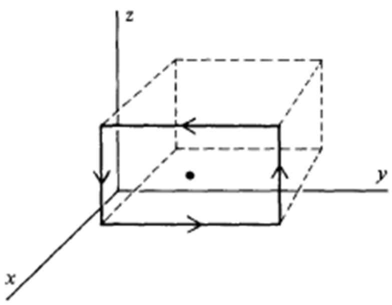
$$= \lim_{\acute{a}rea \to 0} \left(\left(-\frac{\partial P}{\partial y}(x_0+\epsilon, y_0+\epsilon_y, z_0) \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\left(x_0+h, y_0+\epsilon_y, z_0\right) \right) \right)$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$$

Procediendo de manera análoga con las otras caras se tiene



$$\lim_{área\to 0} \frac{1}{área(R)} \oint F = -\frac{\partial R}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial P}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$$



$$\lim_{área\to 0} \frac{1}{área(R)} \oint F = \frac{\partial R}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) - \frac{\partial Q}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$$

Pdemos interpretar lo anterior como una rotación del rectángulo R para cada vector normal $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ es decir

$$rot_{\hat{n}} F(x_0, y_0, z_0) = \lim_{área\to 0} \frac{\oint_R F}{área(R)}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) - \frac{\partial Q}{\partial z}(x_0, y_0, z_0), -\frac{\partial R}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial P}{\partial z}(x_0, y_0, z_0), -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \right) \cdot \hat{n}$$

Definición 1. *Sea $F = (P, Q, R) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que*

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \ \frac{\partial P}{\partial z} \ \frac{\partial Q}{\partial x}, \ \frac{\partial Q}{\partial z} \ \frac{\partial R}{\partial x}, \ \frac{\partial R}{\partial z}$$

existen para todo(x_0, y_0, z_0) en el dominio del campo. Definimos el rotacional de F en(x_0, y_0, z_0), al cual se le denotara rot $F(x_0, y_0, z_0)$, como el vector

$$rot\ F(x_0, y_0, z_0)$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) - \frac{\partial Q}{\partial z}(x_0, y_0, z_0), -\frac{\partial R}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial P}{\partial z}(x_0, y_0, z_0), -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \right)$$