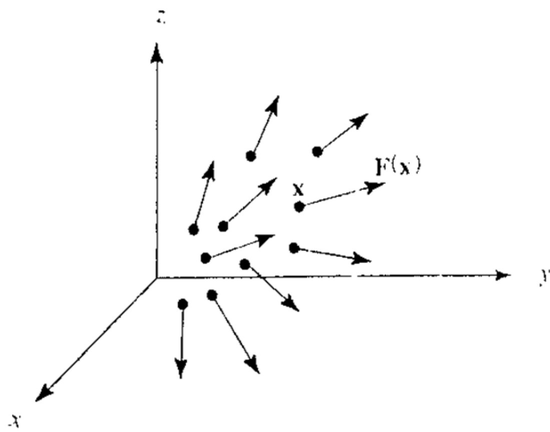
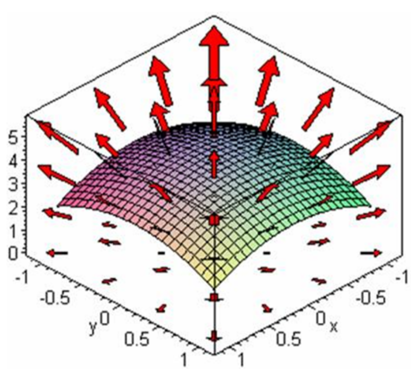
Integral de Superfície sobre funciones vectoriales

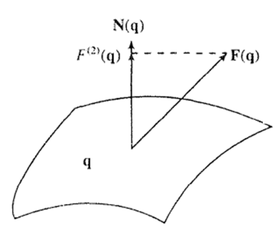
Físicamente un campo vectorial representa la distribución espacial de una magnitud vectorial. Matemáticamente se define un campo vectorial como una función vectorial de las coordenadas. Supongamos que $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo continuo en $\mathbb{R}^3$



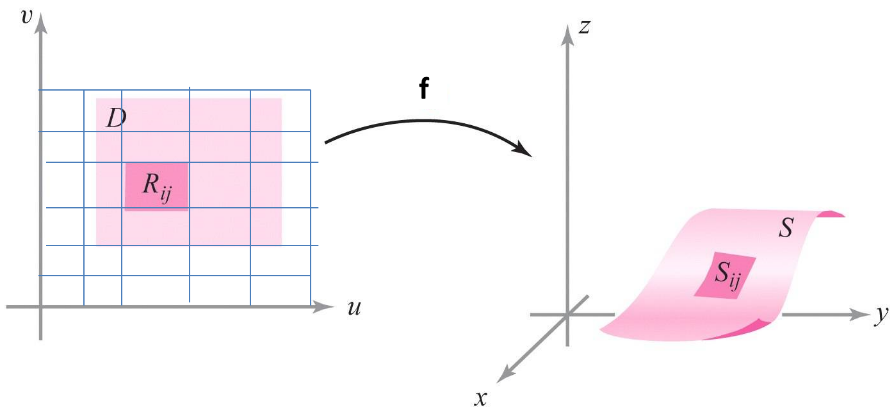
Y sea S una superficie suave. Si F representa el campo de velocidades de un fluido, se trata de ver cuál es el flujo de éste a través de la superficie S.



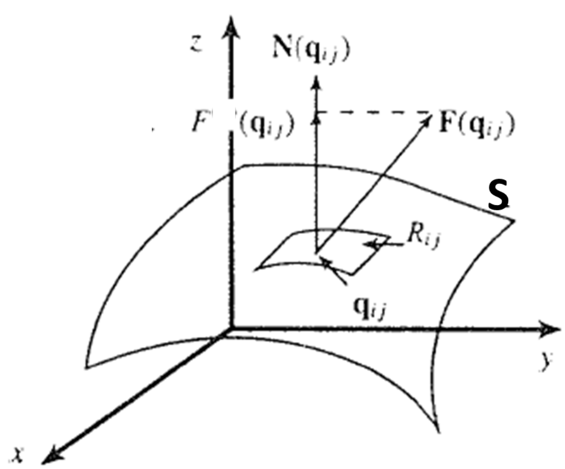
La integral de superfície de un campo vectorial puede interpretarse como el flujo del campo a través de la superfície. Intuitivamente el flujo de un campo de vectores a través de una superfície es la parte de dicho campo que atraviesa la superfície.



Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de la superficie S, y tomemos la orientación de S según el campo continuo de vectores normales $N : S \to \mathbb{R}^3$. Si hacemos una partición de la región D en rectangulos R_{ij}, las imagenes $f(R_{ij})$ proporcionan una partición de la superficie S,



en cada rectángulo R_{ij} tomamos un punto $(u_{ij}, v_{ij}) = p_{ij}$, y consideramos la imagen de éste $f(p_{ij}) = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) = q_{ij}$ el cual se encontrara en el rectángulo $f(R_{ij}) = S_{ij}$. Una estimación aproximada del flujo del campo F a través del rectángulo S_{ij} se obtiene al multiplicar la componente $F(q_{ij})$ sobre $N(q_{ij})$ por el área del rectángulo S_{ij}



tenemos que

$$flujo\ (S_{ij}) = \frac{F(q_{ij}) \cdot N(q_{ij})}{\|N(q_{ij})\|}\ área\ f(R_{ij}) = \frac{F(q_{ij}) \cdot N(q_{ij})}{\|N(q_{ij})\|} \|N(q_{ij})\| \triangle_{u_{ij}} \triangle_{v_{ij}} = F(q_{ij}) \cdot N(q_{ij}) \triangle_{u_{ij}} \triangle_{v_{ij}}$$

por lo tanto el flujo a través de S

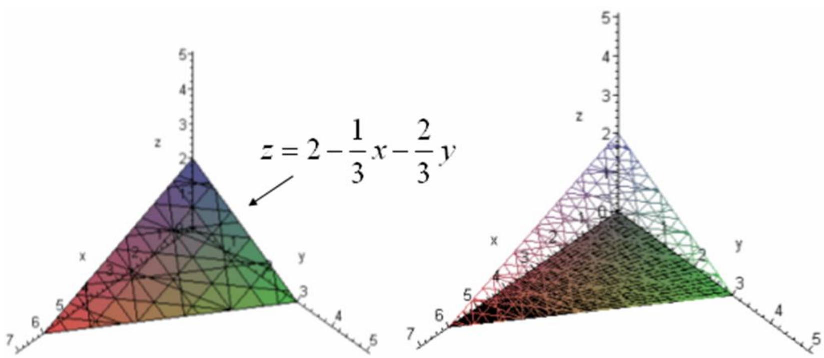
$$\lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} F(q_{ij}) \cdot N(q_{ij}) \triangle_{u_{ij}} \triangle_{v_{ij}} \underbrace{=}_{suma\ de\ Riemann} \int\int_D F(f(u,v)) \cdot N(f(u,v)) dudv$$

Definición 1. *Sea $S = f(D)$ una superfície paramétrica y sea $F : V \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo en el abierto V tal que $S \subset V$. Se define la integral de superfície del campo vectorial F como*

$$\int\int_D F\left(f(u,v)\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}\right) dudv$$

Ejemplo Vamos a calcular el flujo del campo $F(x,y,z) = (x, -2y, -z)$ a través de la superfície

$$s = \{(x,y,z)|x + 2y + 3z = 6, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

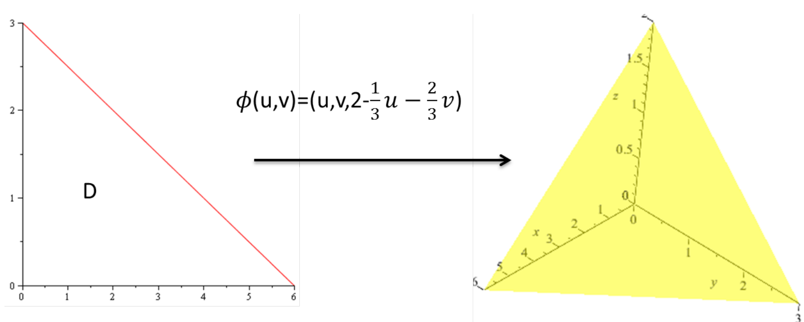


Tenemos que una parametrización de esta superfície sería

$$\phi(u,v) = (u, v, 2 - \frac{1}{3}u - \frac{2}{3}v)$$

con

$$D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq 6,\ 0 \leq v \leq 3 - \frac{u}{2}\}$$

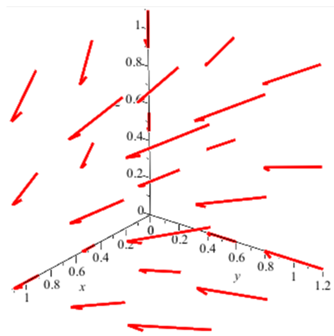


$\therefore$

$$T_u = \frac{\partial \phi}{\partial u} = (1, 0, -\frac{1}{3}) \quad T_v = \frac{\partial \phi}{\partial v} = (0, 1, -\frac{2}{3}) \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}\right) = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$$

Ahora bien el campo $F(x, y, z) = (x, -2y, -z)$ se comporta mas o menos así

$F(x, y, z) = x, -2y, -z$



Evaluamos la parametrización $\phi(u, v)$ en el campo y tenemos que

$$F(\phi(u, v)) = F\left(u, v, 2 - \frac{1}{3}u - \frac{2}{3}v\right) = \left(u, -2v, -2 + \frac{1}{3}u + \frac{2}{3}v\right)$$

$\therefore$ la integral de supeficie nos queda

$$\int\int_D F(\phi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v}\right)\ du\ dv = \int_0^6 \int_0^{3-\frac{u}{2}} \left(u, -2v, -2 + \frac{1}{3}u + \frac{2}{3}v\right) \cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) dvdu$$

$$= \int_0^6 \int_0^{3-\frac{u}{2}} \left(\frac{u}{3} - \frac{4v}{3} - 2 + \frac{u}{3} + \frac{2v}{3}\right) dvdu = \int_0^6 \int_0^{3-\frac{u}{2}} \left(\frac{2u}{3} - \frac{2v}{3} - 2\right) dvdu =$$

$$\frac{1}{3}\int_0^6 \int_0^{3-\frac{u}{2}} (2u - 2v - 6)\, dvdu = \frac{1}{3}\int_0^6 \left(2uv - v^2 - 6y\Big|_0^{3-\frac{u}{2}}\right) du = \frac{1}{12}\int_0^6 \left(30u - 108 - 5u^2 + 18u\right) du$$

$$\frac{1}{12}\left(\frac{30u^2}{2} - 180u - \frac{5u^3}{6} + \frac{18u^2}{2}\Big|_0^6\right) = \frac{1}{2}(190 - 108 - 60 + 54) = \frac{1}{2}(-24) = -12$$

geométricamente la expansión del flujo sobre la superficie se vería mas o menos así