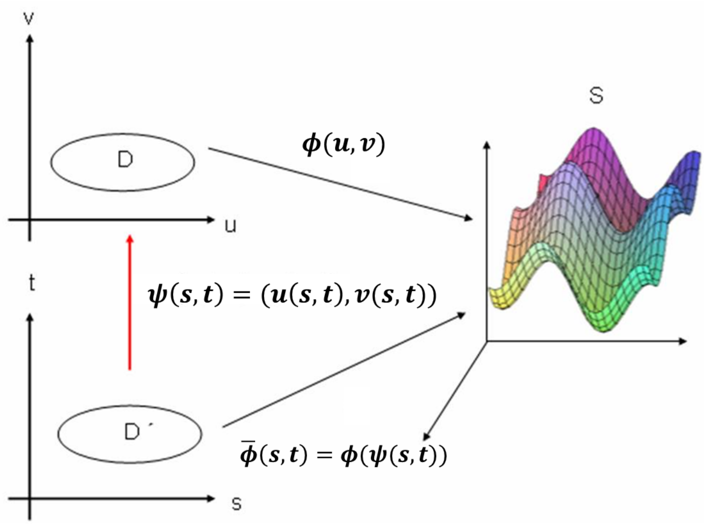
Independencia de la parametrización

En el caso de las integrales de superfície sobre campos vectoriales vamos a ver que su valor no depende de la parametrización

Proposición 1. *Sean $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie y $F : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ continua. Sean $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\overline{\phi} : D' \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones de S tales que $\overline{\phi}$ es una reparametrización de ϕ se tiene entonces que*

$$\int\int_D F(\phi) \cdot (T_u \times T_v)\ du\ dv = \int\int_{D'} F(\overline{\phi}) \cdot \left(T_{\overline{\phi}_s} \times T_{\overline{\phi}_t}\right)\ ds\ dt$$



Demostración.
Tenemos que $\overline{\phi} = \phi \circ \psi$ por lo tanto

$$\int\int_D F\left(\phi(u,v)\right) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v)\right) dudv \underbrace{=}_{(u,v)=\varphi(s,t)}$$

$$\int\int_{D'} F(\phi(\psi(s,t))) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}(\psi(s,t)) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(\psi(s,t))\right) \left| J\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)}\right|\ ds\ dt =$$

$$\pm \int\int_{D'} F(\overline{\phi}(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial s} \times \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial t}\right)\ ds\ dt$$

Por lo que si $\overline{\phi}$ recorre a S con la misma orientación que ϕ entonces

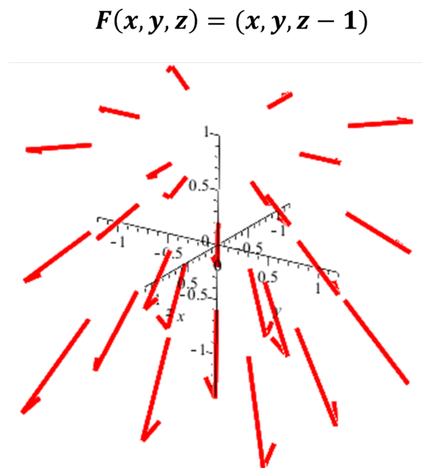
$$\int\int_D F\left(\phi(u,v)\right) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v)\right)\ du\ dv = \int\int_{D'} F(\overline{\phi}(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial s} \times \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial t}\right)\ ds\ dt$$

Por lo que si $\overline{\phi}$ recorre a S con la orientación contraria que ϕ entonces

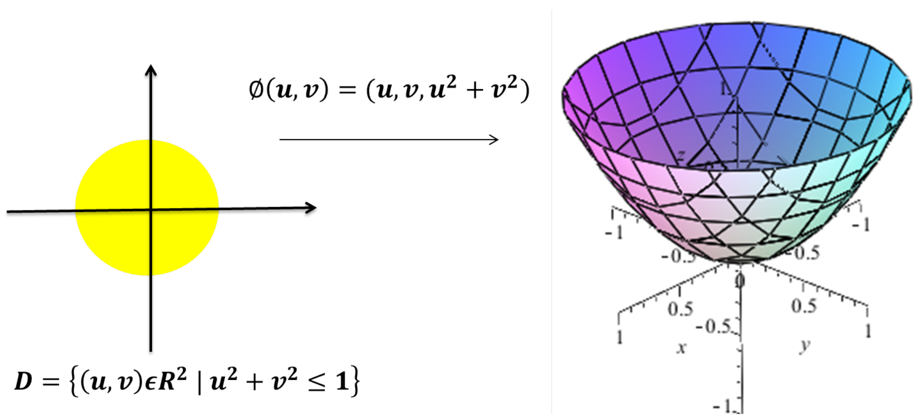
$$\int\int_D F\left(\phi(u,v)\right) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v)\right)\ du\ dv = -\int\int_{D'} F(\overline{\phi}(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial s} \times \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial t}\right)\ ds\ dt$$

□

Ejemplo Dado el campo $F(x,y,z)=(x,y,z-1)$ y la superfície parametrizada $\phi(u,v)=(u,v,u^2+v^2)$ donde $D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2|u^2+v^2\leq 1\}$ En este caso el campo F se comporta mas o menos asi



y la función ϕ parametriza un paraboloide



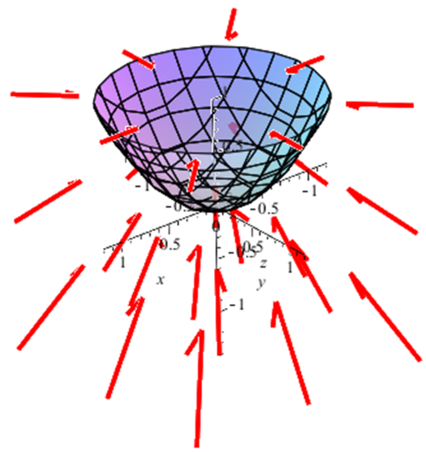
se tiene entonces que para calcular el flujo

$$\int\int_D F(\phi(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\times\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)dudv=\int_0^1\int_1^{\sqrt{1-u^2}}(u,v,u^2+v^2-1)\cdot(-2u,-2v,1)dudv$$

$$=\int_0^1\int_1^{\sqrt{1-u^2}}(-u^2-v^2-1)dvdu\underbrace{=}_{u=r\cos\theta\quad v=r\operatorname{sen}\theta}\int_0^1\int_0^{2\pi}(-r^2\cos^2\theta-r^2\operatorname{sen}^2\theta-1)rdrd\theta$$

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}(-r^3-r)drd\theta=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{r^4}{4}-\frac{r^2}{2}\Big|_0^1\right)d\theta=\int_0^{2\pi}-\frac{3}{4}d\theta=-\frac{3}{2}\pi$$

En este caso el flujo del campo vectorial se invierte al aplicarlo a la parametrización con orientación negativa de la superficie



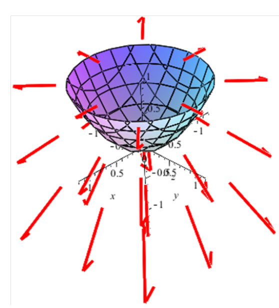
por lo que el flujo apunta hacia el interior de la superficie.
Una forma de invertir la orientación del flujo, es cambiando la dirección del vector normal es decir si $n = (-2u, -2v, 1)$ entonces $\widetilde{n} = (2v, 2u, -1)$ que proviene de la parametrización $\widetilde{\phi} = (v, u, u^2 + v^2)$ por lo tanto para calcular el flujo se tiene que

$$\int\int_D F(\widetilde{\phi}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial u} \times \frac{\partial\widetilde{\phi}}{\partial v}\right) dudv = \int\int_{D'} (v, u, u^2 + v^2 - 1) \cdot (2v, 2u, -1) dudv$$

$$= \int\int_{D'} (u^2 + v^2 + 1) dvdu \underbrace{=}_{u=r\cos\theta \qquad v=r\,\mathrm{sen}\,\theta} \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^3 + r) dr \; d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2}\bigg|_0^1\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{3}{4} d\theta = \frac{3}{2}\pi$$

$\overline{\phi}$(u , v)=(v , u , $u^2 + v^2$)



en este caso con la reparametrización $\overline{\phi} = (v, u, u^2 + v^2)$ se invierte la orientación del flujo

Ejemplo Consideremos el campo $F(x,y,z) = (x,y,z)$ y
$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 = c^2\}$ y vamos a calcular el flujo del campo vectorial F sobre S, se tiene entonces que una parametrización para S sería
$\phi(u,v) = (c\cos u \operatorname{sen} v, c\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, c\cos v)$ con $u \in [0,2\pi] \quad v \in [0,\pi]$ mientras que

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = (-c\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, c\cos u \operatorname{sen} v, 0) \quad \frac{\partial \phi}{\partial v} = (c\cos u \cos v, c\operatorname{sen} u \cos v, -c\operatorname{sen} v)$$

$\therefore$

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} = -c^2\left(\cos u \operatorname{sen}^2 v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen}^2 v, \operatorname{sen} v \cos u\right)$$

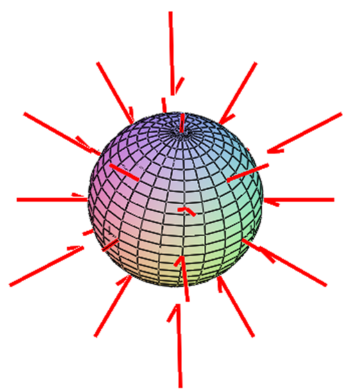
Por otro lado

$$F(c\cos u \operatorname{sen} v, c\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, c\cos v) = (c\cos u \operatorname{sen} v, c\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, c\cos v)$$

$\therefore$

$$\int_S F ds = \int\int_D (c\cos u \operatorname{sen} v, c\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, c\cos v) \cdot \left(-c^2 \cos u \operatorname{sen}^2 v, -c^2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen}^2 v, -c^2 \operatorname{sen} v \cos u\right) dA =$$

$$= \int\int_D -c^3 \operatorname{sen} v dA = c^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} -\operatorname{sen} v \; dv \; du = c^3 \int_0^{2\pi} \left(\cos v \Big|_0^{\pi}\right) du = c^3 \int_0^{2\pi} -2du = -4\pi c^3$$



En este caso el flujo tiene orientación negativa
Si intercambiamos los papeles de (u,v) tenemos que $\overline{\phi}(u,v) = (c\cos v \operatorname{sen} u, c\operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, c\cos u)$ con $v \in [0,2\pi] \quad u \in [0,\pi]$ mientras que

$$\frac{\partial f}{\partial u} = (c\cos u \cos v, c\cos u \operatorname{sen} v, -c\operatorname{sen} u) \quad \frac{\partial f}{\partial v} = (-c\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, c\operatorname{sen} u \cos v, 0)$$

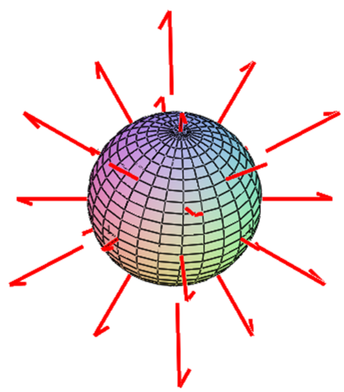
$\therefore$

$$\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial v} = c^2\left(\operatorname{sen}^2 u \cos v, \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \cos u\right)$$

$\therefore$ para el flujo se tiene que

$$\int_S F ds = \int\int_D (c\cos v \operatorname{sen} u, c\operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, c\cos u) \cdot c^2\left(\operatorname{sen}^2 u \cos v, \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \cos u\right) dA =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} c^3 \operatorname{sen} u \; du \; dv = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{\pi} c^3 \operatorname{sen} u du = 2\pi \left(c^3 \left(-\cos \Big|_0^{\pi} \right) \right) = 4\pi c^3$$



En este caso con la reparametrización

$$\overline{\phi}(u,v) = (c\cos v \operatorname{sen} u, c \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, c\cos u)$$

con $v \in [0, 2\pi]$ $\quad u \in [0, \pi]$ se invirtio la orientación del flujo