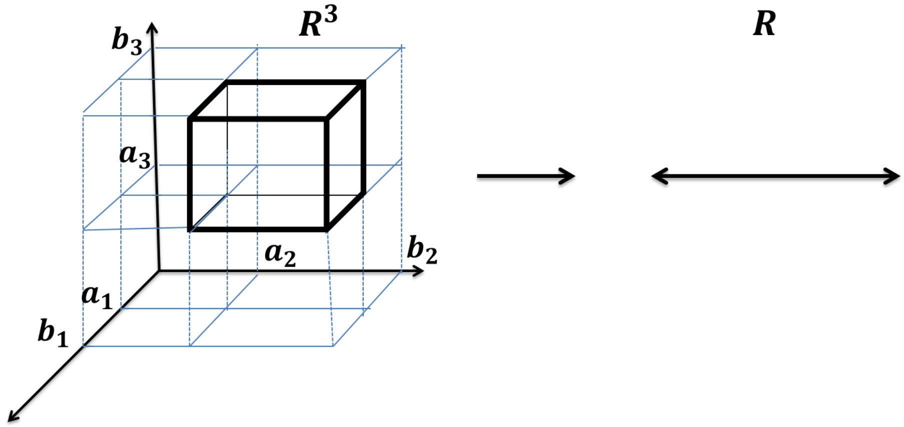
Teorema de Fubini versión $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Sea $f : R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ acotada en R



Sea $\hat{z} \in [a_3, b_3]$ y $R_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]}$. Para cada $(x_1, x_2) \in R_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]}$ definimos $f_{\hat{z}} : [a_3, b_3] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$f_{\hat{z}}(x) = f(x_1, x_2, x)$$

definimos

$$\phi(\hat{z})(x) = \overline{\int_{a_3}^{b_3}} f_{\hat{z}}(x)dx$$

$$\Phi(\hat{z})(x) = \overline{\int_{a_3}^{b_3}} f_{\hat{z}}(x)dx$$

Si f es integrable sobre R entonces ϕ y Φ son integrables sobre $[a_3, b3]$ y además

$$\int_{a_3}^{b_3} \phi = \int_R f = \int_{a_3}^{b_3} \Phi$$

es decir

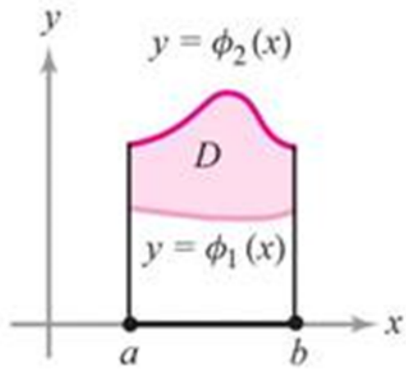
$$\begin{aligned}\int_R f &= \int_{a_3}^{b_3}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz = \int_{a_3}^{b_3}\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)\ dy\ dx\ dz \\ &= \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y,z)\ dx\ dz\ dy = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\ dz\ dx\ dy \\ &= \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_3}^{b_3}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)\ dy\ dz\ dx = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\ dz\ dy\ dx\end{aligned}$$

Integrales dobles extendidas a regiones mas generales

Si consideramos un conjunto$D \subset \mathbb{R}^2$ definido así (Tipo I)

$$D\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \;\; y \;\; \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

en donde φ_1, φ_2 son funciones continuas en $[a,b]$ que cumplen $\phi_1(x) \leq \phi_2(x) \;\; \forall \; x \in [a,b]$



Teorema 1. *Sea D una región del Tipo I, comprendida entre las grfáficas de ϕ_1 y ϕ_2. Supongamos que f esta definida y es acotada en D y que es continua sobre D. Entonces*

$$\int_D f = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dydx \right]$$

Demostración. Si f es continua en D y $R \subset \mathbb{R}^2$ es tal que $D \subset int(D)$ entonces

$$\int_R \chi_D = \int_D$$

Al ser f continua podemos tomar

$$m = \inf\{\phi_1(x) \mid x \in \;\; [a,b]\}$$

$$M = \sup\{\phi_2(x) \mid x \in \;\; [a,b]\}$$

Sea $R = [a,b] \times [m,M]$ un rectángulo que contiene a D, se tiene entonces que

$$\int_D f = \int_R \chi_D f$$

$$= \int_a^b \left(\int_m^M \chi_D \; dy \right) \; dx$$

$$= \int_a^b \left(\int_m^{\phi_1(x)} \chi_D \; dy + \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \chi_D \; dy + \int_{\phi_2(x)}^{M} \chi_D \; dy \right) \; dx$$

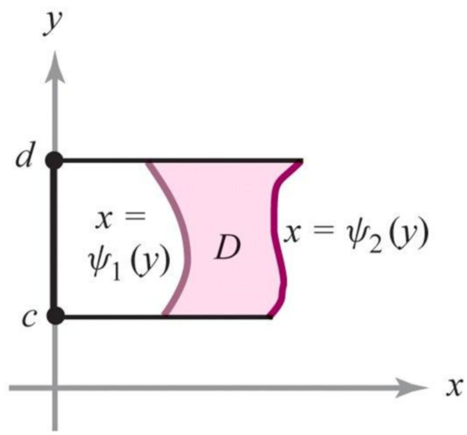
$$= \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \chi_D \, dy \right) \, dx$$

$\square$

Si consideramos un conjunto$D \subset \mathbb{R}^2$ definido así (Tipo II)

$$D\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \;\; y \;\; \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

en donde ψ_1, ψ_2 son funciones continuas en $[c, d]$ que cumplen $\psi_1(y) \leq \psi_2(y) \;\; \forall \; y \in [c, d]$



Teorema 2. *Sea D una región del Tipo II, comprendida entre las grfáficas de ψ_1 y ψ_2. Supongamos que f esta definida y es acotada en D y que es continua sobre D. Entonces*

$$\int_D f = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx dy \right]$$

Demostración. Si f es continua en D y $R \subset \mathbb{R}^2$ es tal que $D \subset int(D)$ entonces

$$\int_R \chi_D = \int_D f$$

Al ser f continua podemos tomar

$$m = \inf\{\psi_1(y) \mid y \in \; [c, d]\}$$
$$M = \sup\{\psi_2(y) \mid y \in \; [c, d]\}$$

Sea $R = [c, d] \times [m, M]$ un rectángulo que contiene a D, se tiene entonces que

$$\int_D f = \int_R \chi_D$$
$$= \int_c^d \left(\int_m^M \chi_D \, dx \right) \, dy$$

$$= \int_c^d \left(\int_m^{\psi_1(x)} \chi_D \ dx + \int_{\psi_1(y)}^{\phi_2(y)} \chi_D \ dx + \int_{\psi_2(y)}^{M} \chi_D \ dx \right) \ dy$$

$$= \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \chi_D \ dx \right) \ dy$$

$\square$

Cambio en el orden de integración

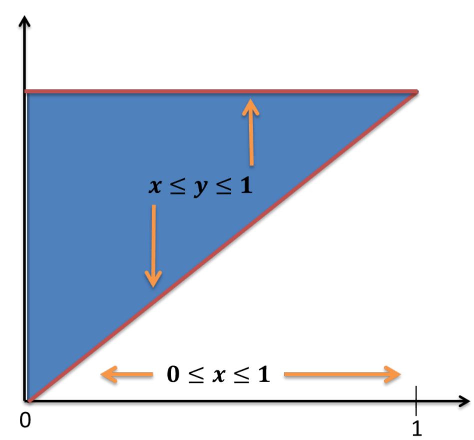
Ciertas regiones D son del tipo I y del tipo II a la vez, en estos casos el orden de integración es indiferente y podemos escribir:

$$\int_D f = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dydx = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dxdy$$

este tipo de regiones se conoces como regiones tipo III.

Ejemplo Calcular $\displaystyle\int_A f$ donde $f(x,y) = x + y$ y $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \ x \leq y \leq 1\}$

Solución En este caso se tiene que A es el conjunto



Como región tipo I se tiene

$$\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 1 \end{array}$$

por lo tanto

$$\int_A f = \int_0^1 \int_x^1 (x+y) \ dy \ dx$$

en este caso

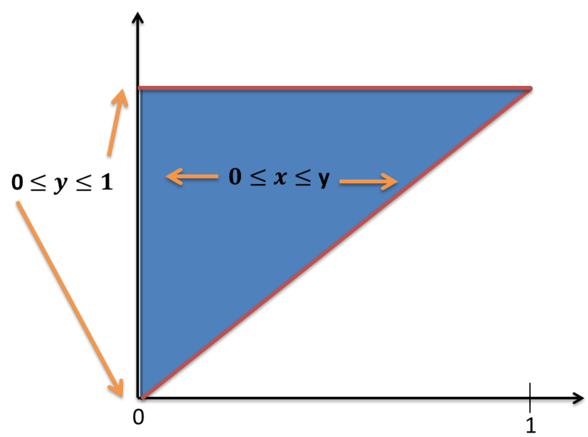
$$\int_0^1 \int_x^1 (x+y)\ dy\ dx = \int_0^1 \left(\int_x^1 (x+y)\ dy \right)\ dx = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\Big|_x^1 \right)\ dx$$

$$= \int_0^1 \left(x + \frac{x}{2} - \frac{3x}{2} \right)\ dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}$$

Como región tipo II se tiene



$$0 \leq y \leq 1$$
$$y \leq x \leq 1$$

por lo tanto

$$\int_A f = \int_0^1 \int_y^1 (x+y)\ dx\ dy$$

en este caso

$$\int_0^1 \int_y^1 (x+y)\ dx\ dy = \int_0^1 \left(\int_y^1 (x+y)\ dx \right)\ dy = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + xy\Big|_y^1 \right)\ dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3y^2}{2} - \frac{1}{2} - y \right)\ dy$$

$$= \frac{y^3}{2} - \frac{y}{2} - \frac{y^2}{2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}$$

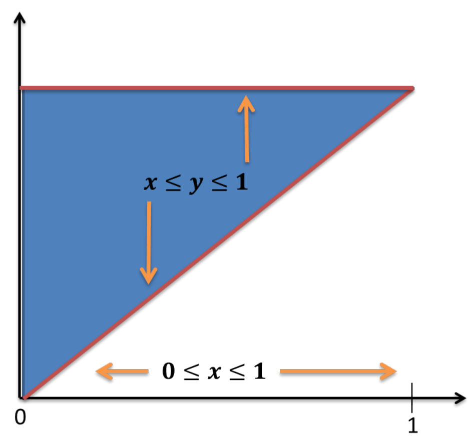
Ejercicio En las siguientes integrales cambiar el orden de integración, dibujar las correspondientes regiones y calcular las integrales de las dos maneras

$$(a)\ \int_0^1 \int_x^1 xy\ dy\ dx$$

$$(b)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos(\theta)} \cos(\theta)\ dr\ d\theta$$

$$(c)\ \int_0^1 \int_1^{2-y} (x+y)^2\ dx\ dy$$

Solución Para el inciso (a) se tiene que la región es: Como región tipo I se tiene



$$\begin{array}{c} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 1 \end{array}$$

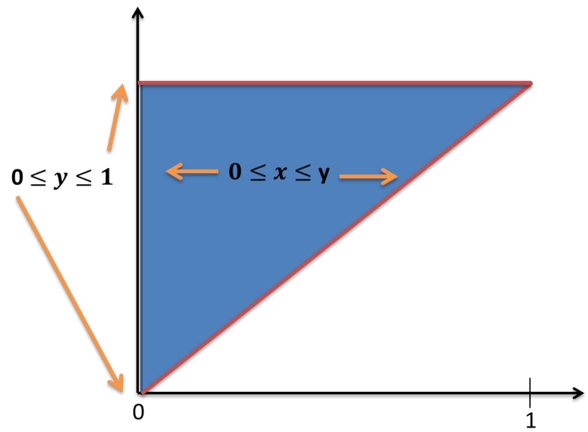
por lo tanto

$$\int_A f = \int_0^1 \int_x^1 (xy)\ dy\ dx$$

en este caso

$$\int_0^1 \int_x^1 (xy)\ dy\ dx = \frac{1}{8}$$

Como región tipo II se tiene



$$\begin{gathered} 0 \leq y \leq 1 \\ y \leq x \leq 1 \end{gathered}$$

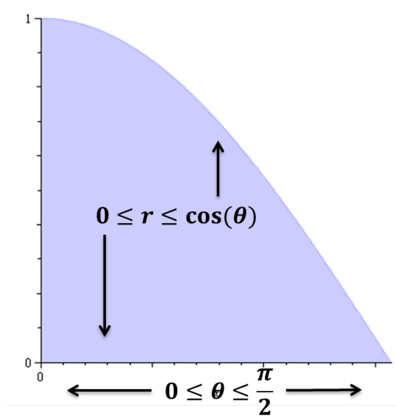
por lo tanto

$$\int_A f = \int_0^1 \int_y^1 (xy)\ dx\ dy$$

en este caso

$$\int_0^1 \int_y^1 (xy)\ dx\ dy = \frac{1}{8}$$

Para el inciso (b) se tiene que la región es: Como región tipo I se tiene



$$\begin{gathered} 0 \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq \cos\theta \end{gathered}$$

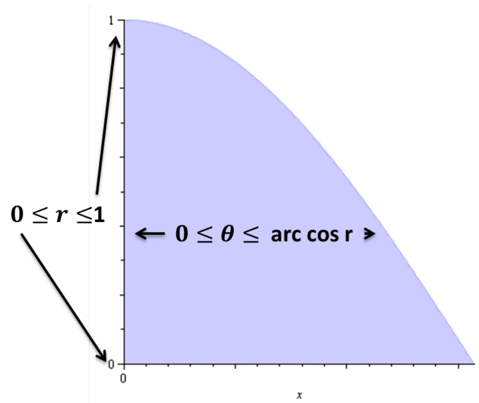
por lo tanto

$$\int_A f = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} \cos\theta \ dr \ d\theta$$

en este caso

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} \cos\theta \ dr \ d\theta = \frac{\pi}{4}$$

Como región tipo II se tiene



$$0 \leq r \leq 1$$
$$0 \leq \theta \leq \operatorname{arc\,cos}\ r$$

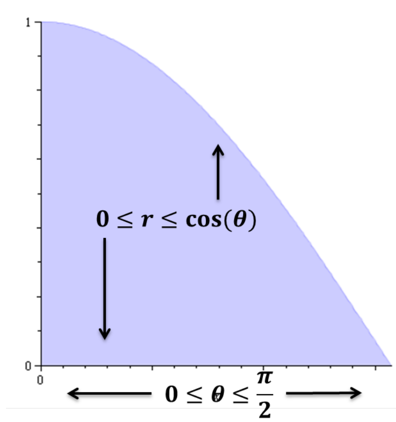
por lo tanto

$$\int_A f = \int_0^1 \int_0^{\operatorname{arc\,cos}\ r} \cos\theta \ d\theta \ dr$$

en este caso

$$\int_0^1 \int_0^{\operatorname{arc\,cos}\ r} \cos\theta \ d\theta \ dr = \frac{\pi}{4}$$

Para el inciso (b) se tiene que la región es: Como región tipo I se tiene



$$0 \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2}$$
$$0 \leq r \leq \cos\theta$$

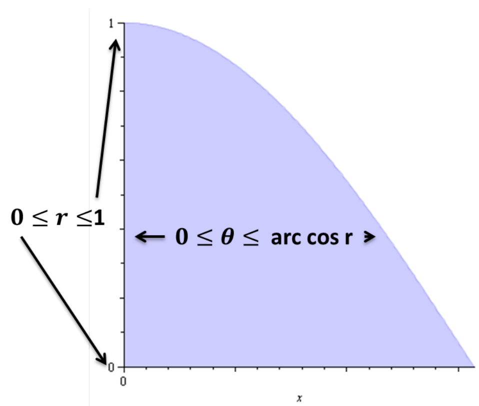
por lo tanto

$$\int_A f = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} \cos\theta \ dr \ d\theta$$

en este caso

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} \cos\theta \ dr \ d\theta = \frac{\pi}{4}$$

Como región tipo II se tiene



$$0 \leq r \leq 1$$
$$0 \leq \theta \leq \arccos \ r$$

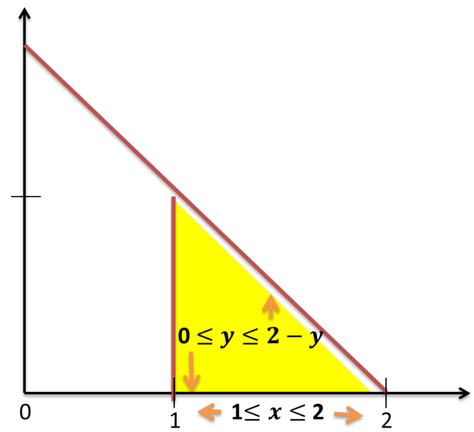
por lo tanto

$$\int_A f = \int_0^1 \int_0^{\arccos \ r} \cos\theta \ d\theta \ dr$$

en este caso

$$\int_0^1 \int_0^{\arccos \ r} \cos\theta \ d\theta \ dr = \frac{\pi}{4}$$

Para el inciso (c) se tiene que la región es: Como región tipo I se tiene



$$1 \leq x \leq 2$$
$$0 \leq y \leq 2 - x$$

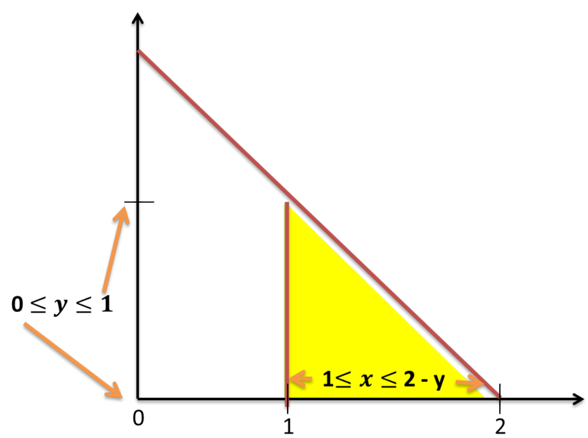
por lo tanto

$$\int_A f = \int_1^2 \int_0^{2-x} (x+y)^2 \, dx \, dy$$

en este caso

$$\int_1^2 \int_0^{2-x} (x+y)^2 \, dx \, dy = \frac{17}{12}$$

Como región tipo II se tiene



$$0 \leq y \leq 1$$
$$1 \leq x \leq 2 - y$$

por lo tanto

$$\int_A f = \int_0^1 \int_1^{2-y} (x+y)^2 \, dx \, dy$$

en este caso

$$\int_0^1 \int_1^{2-y} (x+y)^2 \; dx \; dy = \frac{17}{12}$$