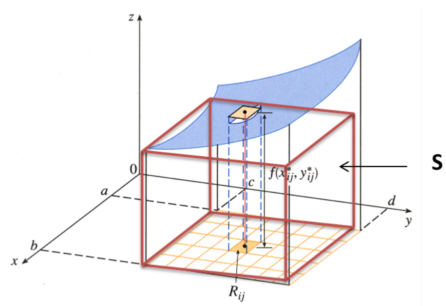
Integrales Iteradas

Dada una función de dos variables que está definida sobre el rectángulo cerrado

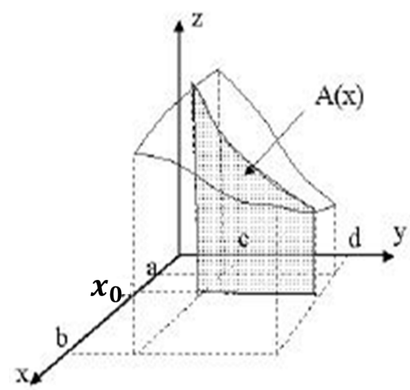
$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

suponiendo que $f(x, y) \geq 0$. La integral de f sobre R se puede interpretar como el volumen de la región que esta encima de R y debajo de la gráfica de f, es decir

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}$$



Si cortamos nuestra región por un plano paralelo al plano YZ



a la altura del punto $x_0 \in [a, b]$ del eje X, la figura que se obtiene es la misma que obtenemos al considerar aquella que está por debajo de la gráfica de la función $f_{x_0} : [c, d] \to \mathbb{R}$ definida como

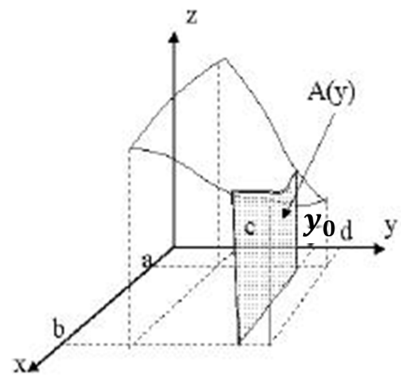
$$f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$$

de esta forma, el área de la figura correspondiente al corte realizado a la altura x_0 que podemos denotar $\alpha(x_0)$ coincide con ser

$$\alpha(x_0) = \int_c^d f_{x_0}(y)dy$$

$$= \int_c^d f(x_0, y)dy$$

También podemos hacer cortes con planos paralelos al plano XZ; así si cortamos a la altura del punto $y_0 \in [c, d]$ del eje Y



Se obtiene una figura que coincide con con la que está por debajo de la gráfica de la función

$$f_{y_0} : [a, b] \to \mathbb{R}$$

definida como $f_{y_0} = f(x, y_0)$, de tal forma que el área que podemos denotar $\beta(y_0)$, estará dada por

$$\beta(y_0) = \int_a^b f_{y_0} dx$$

$$= \int_a^b f(x, y_0)dx$$

En este caso β es una función definida sobre el intervalo $[c, d]$
Por tanto el volumen del sólido entre la superficie y el rectángulo R estará dado por

$$\int_R f = \int_a^b \alpha(x)\ dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\ dy \right) dx$$

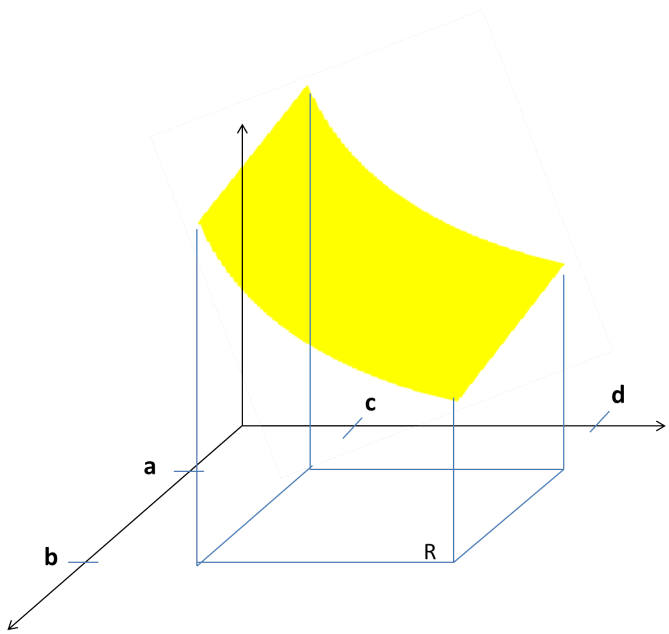
o por

$$\int_R f = \int_c^d \beta(y)\ dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\ dx \right) dy$$

Teorema de Fubini

El teorema de Fubini nos va a dar una técnica para el cálculo de integrales de funciones de varias variables mediante el cálculo de varias integrales de funciones de una variable. A partir de ahí se podrán utilizar todas las técnicas conocidas del Análisis de una variable para el cálculo de integrales mediante cálculo de primitivas y el teorema fundamental del cálculo (Regla de Barrow): cambios de variables, integración por partes, etc.

Teorema 1. *Teorema de Fubini Sean* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *y* $[c,d] \subset \mathbb{R}$ *dos intervalos tal que,* $R = [a,b] \times [c,d]$, *y* $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función integrable.*



Para cada $\hat{y}$ *fijo en* $[c,d]$ *definimos la funcion* $f_{\hat{y}} : [t_{i-1}, t_i] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *como*

$$f_{\hat{y}}(x) = f(x, \hat{y})$$

y definimos

$$\phi(\hat{y}) = \underline{\int}_{t_{i-1}}^{t_i} f_{\hat{y}}(x)\ dx$$

$$\Phi(\hat{y}) = \overline{\int}_{t_{i-1}}^{t_i} f_{\hat{y}}(x)\ dx$$

Si f *es integrable sobre* R *entonces* ϕ, Φ *son integrables sobre* $[c,d]$ *y además*

$$\int_R f = \int_c^d \phi(y)dy = \int_c^d \Phi(y)dy$$

Demostración. Observemos en primer lugar que una partición de $R = [a,b] \times [c,d]$ esta formada por una partición de $P[a,b]$ y otra de $P[c,d]$,
Sea

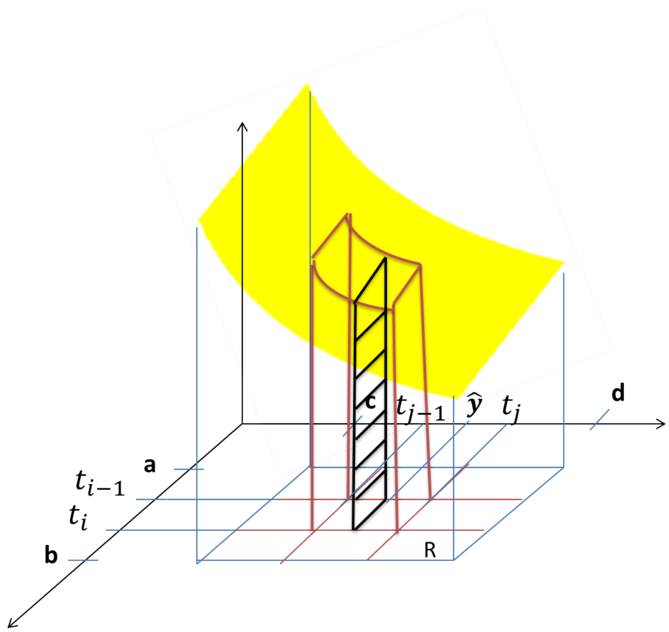
$$P_1 \in P_{[a,b]} = \{a = t_0, t_1, ...t_i, ..., t_n = b\}$$

y sea

$$P_2 \in P_{[c,d]} = \{c = t_0, t_1, ...t_j, ..., t_m = d\}$$

$$P = P_1 \times P_2 \in P_R$$

Y cualquier rectángulo de la partición P tiene área $|t_i - t_{i-1}||t_j - t_{j-1}|$



definimos

$$m_j(\phi) = \text{ínf}\{\phi(\hat{y}) \mid \hat{y} \in [t_{j-1}, t_j]\}$$
$$M_j(\phi) = \sup\{\phi(\hat{y}) \mid \hat{y} \in [t_{j-1}, t_j]\}$$
$$m_j(\phi) = \text{ínf}\{\Phi(\hat{y}) \mid \hat{y} \in [t_{j-1}, t_j]\}$$
$$M_j(\phi) = \sup\{\Phi(\hat{y}) \mid \hat{y} \in [t_{j-1}, t_j]\}$$
$$m_i(f_{\hat{y}}) = \text{ínf}\{f_{\hat{y}}(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$$
$$M_i(f_{\hat{y}}) = \sup\{f_{\hat{y}}(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i]\}$$
$$m_{ij}(f) = \text{ínf}\{f(x,y) \mid (x,y) \in R_{ij}\}$$
$$M_{ij}(f) = \sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in R_{ij}\}$$

De lo anterior tenemos que se cumple

$$m_{ij}(f) \leq m_i(f_{\hat{y}}) \leq M_i(f_{\hat{y}}) \leq M_{ij}(f)$$

Multiplicando por $(t_i - t_{i-1}) > 0$ se tiene

$$m_{ij}(f)(t_i - t_{i-1}) \leq m_i(f_{\hat{y}})(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(f_{\hat{y}})(t_i - t_{i-1}) \leq M_{ij}(f)(t_i - t_{i-1})$$

Sumando sobre i

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij}(f)(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} m_i(f_{\hat{y}})(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(f_{\hat{y}})(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_{ij}(f)(t_i - t_{i-1})$$

se tiene entonces

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij}(f)(t_i - t_{i-1}) \leq \underline{S}(f_{\hat{y}}, P) \leq \overline{S}(f_{\hat{y}}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_{ij}(f)(t_i - t_{i-1})$$

sabemos que

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij}(f)(t_i - t_{i-1}) \leq \underline{S}(f_{\hat{y}}, P) \leq \phi(\hat{y}) \leq \Phi(\hat{y}) \leq \overline{S}(f_{\hat{y}}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_{ij}(f)(t_i - t_{i-1})$$

esto pasa para toda $\hat{y} \in [t_{j-1}, t_j]$ esto prueba que los extremos de estas desigualdades son cota inferior y superior (respectivamente) tanto de ϕ como de Φ en el subrectángulo R_{ij} y por lo tanto tendremos que

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij}(f)(t_i - t_{i-1}) \leq m_j(\phi) \leq M_j(\phi) \leq \sum_{i=1}^{n} M_{ij}(f)(t_i - t_{i-1})$$

y también

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij}(f)(t_i - t_{i-1}) \leq m_j(\Phi) \leq M_j(\Phi) \leq \sum_{i=1}^{n} M_{ij}(f)(t_i - t_{i-1})$$

ahora multiplicamos por $(t_j - t_{j-1}) > 0$

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij}(f)(t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}) \leq m_j(\phi)(t_j - t_{j-1}) \leq M_j(\phi)(t_j - t_{j-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_{ij}(f)(t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1})$$

y también

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij}(f)(t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}) \leq m_j(\Phi)(t_j - t_{j-1}) \leq M_j(\Phi)(t_j - t_{j-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_{ij}(f)(t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1})$$

Sumamos sobre j

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}(f)(t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{m} m_j(\phi)(t_j - t_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{m} M_j(\phi)(t_j - t_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} M_{ij}(f)(t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1})$$

y también

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}(f)(t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{m} m_j(\Phi)(t_j - t_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{m} M_j(\Phi)(t_j - t_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} M_{ij}(f)(t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1})$$

se tiene entonces

$$\underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(\phi,P) \leq \overline{S}(\phi,P) \leq \overline{S}(f,P)$$

y también

$$\underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(\Phi,P) \leq \overline{S}(\Phi,P) \leq \overline{S}(f,P)$$

como f es integrable sobre R, entonces las funciones ϕ y Φ son integrables sobre $[c,d]$ y además

$$\int_R f = \int_c^d \phi(y)dy = \int_c^d \Phi(y)dy$$

es decir

$$\int_R f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx \right) dy$$

siguiendo estos pasos pero considerando ahora un $\hat{x}$ fijo en $[a,b]$ y haciendo variar la y se tendría

$$\int_R f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right) dx$$

es decir

$$\int_R f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx \right) dy = \int_R f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right) dx$$

$\square$