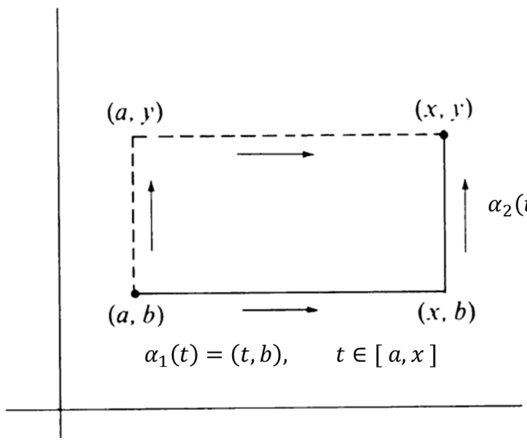
Métodos para construir funciones potenciales

Construcción de un potencial en un rectángulo abierto

Si F es un campo gradiente continuo en un rectángulo abierto de $\mathbb{R}^n$, puede construirse un poitencial integrando entre un punto fijo y un punto arbitrario siguiendo un camino formado por segmentos rectilíneos paralelos a los ejes coordenados



Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
\int_{(a,b)}^{(x,y)} F &= \int_{\alpha_1} F + \int_{\alpha_2} F \\
&= \int_a^x F(\alpha_1(t))\alpha_1'(t)\ dt + \int_x^b F(\alpha_2(t))\alpha_2'(t)\ dt \\
&= \int_a^x [F_1(t,b), F_2(t,b)] \cdot [1,0]\ dt + \int_a^x [F_1(x,t), F_2(x,t)] \cdot [0,1]\ dt \\
&= \int_a^x F_1(t,b)\ dt + \int_b^y F_2(x,t)\ dt
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f(x,y) = \int_a^x F_1(t,b)\ dt + \int_b^y F_2(x,t)\ d$$

vamos a comprobar que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = F_1(x,y)$.

En este caso

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_a^x F_1(t,b)\ dt + \int_b^y F_2(x,t)\ dt\right) \\
&= F_1(x,b) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_b^y F_2(x,t)\ dt\right) \\
& F_1(x,b) + \int_b^y \frac{\partial}{\partial x} F_2(x,t)\ dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&F_1(x,b) + \int_b^y \frac{\partial}{\partial y} F_1(x,t)\ dt \\
&= F_1(x,b) + F_1(x,y) - F_1(x,b) \\
&= F_1(x,y)
\end{aligned}
$$

Mientras que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_a^x F_1(t,b)\ dt + \int_b^y F_2(x,t)\ dt\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\int_b^y F_2(x,t)\ dt \\
&= F_2(x,y)
\end{aligned}
$$

Ejemplo Consideremos el campo $F :\to \mathbb{R}^2$ dado por $F(x,y) = (x+y^2, 2xy)$. Compruebe que el campo es conservativo y encuentre su función potencial.

Salución Tenemos que

$$
\begin{pmatrix} \frac{\partial(x+y^2)}{\partial y} = 2y \\ \frac{\partial(2xy)}{\partial x} = 2y \end{pmatrix} \Rightarrow \ F \ \textit{es conservativo}
$$

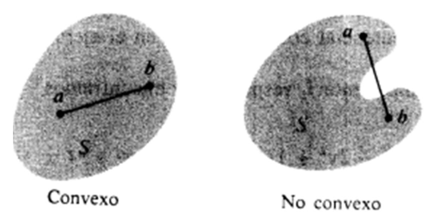
para la función potencial tomemos $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\lambda(t) = (tx, ty)$. Entonces

$$
f(x,y) = \int_\lambda F = \int_0^1 F(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t) dt = \int_0^1 F(tx,ty)\cdot(x,y)dt = \int_0^1 (tx+(ty)^2, 2t^2xy)\cdot(x,y)dt
$$

$$
= \int_0^1 tx^2 + t^2y^2x + 2t^2xy^2 dt = \int_0^1 tx^2 + 3t^2xy^2 dt = x^2\frac{t^3}{2} + t^3xy^2 \ |_0^1 = \frac{x^2}{2} + xy^2
$$

Construcción de un potencial en un conjunto convexo

Un conjunto S de $\mathbb{R}^n$, se llama convexo si todo par de puntos de S puede unirse con un segmento rectilínea, cuyos puntos pertenecen todos a S.



Si F es un campo gradiente en un conjunto convexo abierto, puede construirse un potencial f integrando F entre un punto fijo a de S hasta un punto cualquiera x siguiendo un segmento de recta que los una. Tal segmento puede representarse parametricamente por

$$
\alpha(t) = a + t(b-a), \quad t \in [0,1]
$$

de donde $\alpha'(t) = (x-a)$, así que el potencial correspondiente viene dado por

$$
\int_0^1 F(\alpha(t))\cdot(x-a)\ dt
$$

Si S contiene al origen podemos considerar $a = 0$ y obtenemos

$$\int_0^1 F(tx) \cdot x \, dt$$

Ejercicio Vamos a comprobar que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = F_1(x, y)$

Solución Haremos la prueba para el caso particular $F \subset \mathbb{R}^2$ tenemos que $F(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$ donde $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ y consideremos un punto p sin perdida de generalidad situado en el origen y consideremos la trayectoria

$$\lambda : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \quad dado \quad por \quad \lambda(t) = t(x, y) \quad t \in [0, 1]$$

definimos la función

$$f(x, y) = \int_\lambda F \cdot d\lambda$$

por demostrar que $\nabla f = F$
tenemos que

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_\lambda F \cdot d\lambda\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^1 F(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t)\right) dt = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^1 ([M(tx, ty), N(tx, ty)] \cdot (x, y))\right) dt$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^1 (M(tx, ty) \cdot x + N(tx, ty) \cdot y)\right) dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}(M(tx, ty) \cdot x + N(tx, ty) \cdot y) dt =$$

$$\int_0^1 \left(M(tx, ty) + x\frac{\partial}{\partial x}M(tx, ty) + y\frac{\partial}{\partial x}N(tx, ty)\right) dt = \int_0^1 \left(M(tx, ty) + xt\frac{\partial}{\partial x}M(tx, ty) + yt\frac{\partial}{\partial x}N(tx, ty)\right) dt =$$

$$\int_0^1 \left(M(tx, ty) + xt\frac{\partial}{\partial x}M(tx, ty) + yt\frac{\partial}{\partial y}M(tx, ty)\right) dt = \int_0^1 t\left(x\frac{\partial}{\partial x}M(tx, ty) + y\frac{\partial}{\partial y}M(tx, ty)\right) + M(tx, ty) dt =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{d}{dt}(t(M(tx, ty)))\right) dt = t(M(tx, ty))|_0^1 = M(x, y)$$

por lo tanto hemos probado que

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = M(x, y) = F_1(x, y)$$

de manera analoga se prueba que

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = N(x, y) = F_2(x, y)$$

de esta manera

$$\nabla f = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = F$$

Ejemplo Dado el campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$F(x,y,z) = (3y^2z + ye^x, 6xyz + e^x, 3xy^2)$$

comprobar que es conservativo y hallar su función potencial

Solución tenemos que

$$\begin{pmatrix} F_1(x,y,z) = 3y^2z + ye^x \\ F_2(x,y,z) = 6xyz + e^x \\ F_3(x,y,z) = 3xy^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial(3xy^2)}{\partial y} = 6xy \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial(6xyz+e^x)}{\partial z} = 6xy \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial(3xy^2)}{\partial x} = 3y^2 \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial(3y^{2+e^x y})}{\partial z} = 3y^2 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial(6xyz+e^x)}{\partial x} = 6yz + e^x \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial(3y^2z+e^x)}{\partial z} = 6yz + e^x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow F \ es \ conservativo$$

para la función potencial tomemos $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\lambda(t) = (tx, ty, tz)$. Entonces

$$f(x,y,z) = \int_\lambda F = \int_0^1 F(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t)dt = \int_0^1 F(tx,ty,tz) \cdot (x,y,z)dt =$$

$$\int_0^1 (3(ty)^2(tz)+e^{tx}, 6(tx)(ty)(tz), 3(tx)(ty)^2) \cdot (x,y,z)dt = \int_0^1 (3t^3y^2z+tye^{tx})x+(6t^3xyz+e^{tx})y+(3t^3xy^2z)dt$$

$$\int_0^1 3t^3y^2zx + txye^{tx} + 6t^3xy^2z + 3t^3xy^2z + ye^{tx}dt = \int_0^1 12t^3xy^2z + txye^{tx} + ye^{tx}dt$$

$$= 12xy^2z\frac{t^4}{4} \mid_0^1 + xy\left(t\frac{e^{tx}}{x} - \int_0^1 \frac{e^{tx}}{x}dt\right) + y\frac{e^{tx}}{x} \mid_0^1 = 3xy^2z + xy\left(\frac{te^{tx}}{x} - \frac{1}{x}\frac{e^{tx}}{x} \mid_0^1\right) + y\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= 3xy^2z + xy\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x^2}e^x + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{y}{x}(e^x - 1) = 3xy^2z + ye^x$$