Rotacional, Divergencia, Gradiente, Laplaciano

Definición 1. *Rotacional Supongamos un campo $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ diferenciable definido en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^3$. Se define el rotacional de F en el punto p de U, denotado por rot $F(p)$, como*

$$rot\ F(p) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}(p) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(p), \frac{\partial F_1}{\partial z}(p) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(p), \frac{\partial F_2}{\partial x}(p) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(p)\right)$$

Definición 2. *Gradiente Supongamos un campo escalar $\varphi : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, que cumple que*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

existen y son continuas. Se define el vector gradiente de φ que se denota $\nabla\ \varphi$ como

$$\nabla\ \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$

Definición 3. *Divergencia Supongamos un campo $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ diferenciable definido en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^3$. Se define la divergencia de F en el punto p de U, denotado por div $F(p)$, como*

$$div\ F(p) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(p) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(p) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(p)$$

Definición 4. *Laplaciano Supongamos un campo $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, es tal que*

$$F = \nabla\ \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$

con $\varphi : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} div\ F &= div\ (\nabla\ \varphi) \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \end{aligned}$$

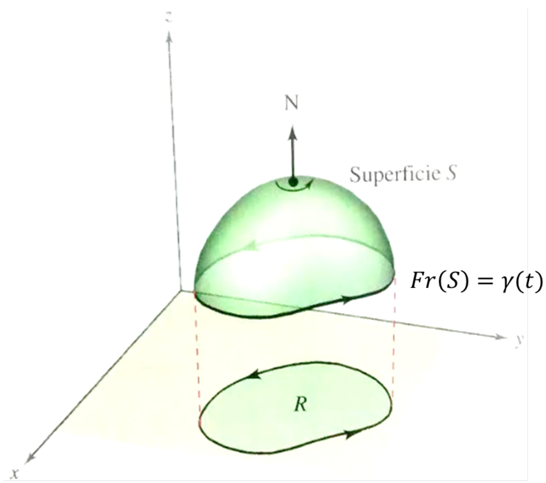
a esta expresión se le conoce con el nombre de Laplaciano de φ se le denota como $\nabla^2\varphi$, es decir

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

Cuando $\nabla^2\varphi = 0, \quad \forall(x, y, z)$ decimos que φ es armónica

Campos Solenoides

El teorema de Stokes relaciona una integral de línea de un campo F sobre el borde de una superficie S, con una integral de superficie sobre S del rotacional del campo F.



Teorema de Stokes

$$\oint_{Fr(S)} \boldsymbol{F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt} = \iint_{S} \boldsymbol{rot\, F \cdot N\, ds}$$

Si un campo $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es tal que

$$G = rot\ F$$

entonces se tendría

$$\int\int_S G \cdot N\ ds = \int\int_S rot\ F \cdot N\ ds = \int_{Fr(S)} F(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt$$

Lo que querría decir esto, es que, para ciertos campos vectoriales G, la integral de superficie del campo G, se reduce a una integral de línea de un campo F.

Reconstrucción de un campo vectorial a partir de su rotacional

Dado un campo vectorial $G = L\hat{i} + M\hat{j} + N\hat{k}$ ¿hay un campo $F = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ tal que rot F=G?

Teorema 1. *Si G es un campo vectorial de clase c^1 definido en $\mathbb{R}^3$ tal que div $G = 0$ entonces existe un campo vectorial F de clase c^1 de modo que*

$$rot\ F = G$$

Demostración. Si $F = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ y $G = L\hat{i} + M\hat{j} + N\hat{k}$ se tiene entonces

$$rot\ F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

se debe cumplir

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = L$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = M$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = N$$

tomando $P = 0$ se tiene

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = L$$
$$-\frac{\partial R}{\partial x} = M$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = N$$

Integrando la segunda expresión se tiene

$$R(x,y,z) = -\int_{x_0}^{x} M(t,y,z)\ dt + f(y,z)$$

tomamos $f(y,z) = 0$

$$R(x,y,z) = -\int_{x_0}^{x} M(t,y,z)\ dt$$

Integrando la tercera expresión se tiene

$$Q(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} N(t,y,z)\ dt + g(y,z)$$

Sustituimos ambas expresiones en la ecuación

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = L$$

y obtenemos

$$\frac{\partial\left(-\int_{x_0}^{x} M(t,y,z)\ dt\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\int_{x_0}^{x} N(t,y,z)\ dt + g(y,z)\right)}{\partial z} = L$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial\left(-\int_{x_0}^{x} M(t,y,z)\ dt\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\int_{x_0}^{x} N(t,y,z)\ dt\right)}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial z} = L$$

$$\Rightarrow\ \int_{x_0}^{x} \frac{\partial\left(-M(t,y,z)\ dt\right)}{\partial y} - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial\left(N(t,y,z)\ dt\right)}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial z} = L$$

$$\Rightarrow\ \int_{x_0}^{x} \left(-\frac{\partial M}{\partial y}(t,y,z) - \frac{\partial N}{\partial y}(t,y,z)\right)\ dt - \frac{\partial g}{\partial z} = L$$

como $div\ F = 0$ entonces

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}$$

por lo tanto

$$\int_{x_0}^{x} \left(-\frac{\partial M}{\partial y}(t,y,z) - \frac{\partial N}{\partial y}(t,y,z) \right) \, dt - \frac{\partial g}{\partial z} = L \ \Rightarrow \ \int_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial L}{\partial x}(t,y,z) \right) \, dt - \frac{\partial g}{\partial z} = L$$

$$\Rightarrow \ L(x,y,z) - L(x_0,y,z) - \frac{\partial g}{\partial z} = L$$

esto quiere decir

$$-L(x_0,y,z) - \frac{\partial g}{\partial z} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{\partial g}{\partial z} = -L(x_0,y,z) \ \Rightarrow \ g(y,z) = -\int_{z_0}^{z} L(x_0,y,u) \, du$$

y asi tenemos que el campo $F = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ dado por

$$P(x,y,z) = 0$$

$$Q(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} N(t,y,z) \, dt - \int_{z_0}^{z} L(x_0,y,u) \, du$$

$$R(x,y,z) = -\int_{x_0}^{x} M(t,y,z) \, dt$$

es tal que

$$rot\ F = G$$

□

Ejemplo Sea $G(x,y,z) = -z\hat{i} + xy\hat{k}$. Hallar F tal que rot F=G

Solución En este caso se tiene

$$G(x,y,z) = (-z,0,xy) = (L(x,y,z), M(x,y,z), N(x,y,z)) \ \Rightarrow \ L(x,y,z) = -z$$

$$G(x,y,z) = (-z,0,xy) = (L(x,y,z), M(x,y,z), N(x,y,z)) \ \Rightarrow \ M(x,y,z) = 0$$

$$G(x,y,z) = (-z,0,xy) = (L(x,y,z), M(x,y,z), N(x,y,z)) \ \Rightarrow \ N(x,y,z) = xy$$

de esta manera

$$L(x,y,z) = -z \ \Rightarrow \ L(x_0,y,u) = -u$$

$$M(x,y,z) = 0 \ \Rightarrow \ M(t,y,z) = 0$$

$$N(x,y,z) = xy \ \Rightarrow \ N(t,y,z) = ty$$

por lo tanto si $x_0 = z_0 = 0$

$$P(x,y,z) = 0$$

$$Q(x,y,z) = \int_0^x ty\ dt - \int_0^z -u\ du = \frac{yt^2}{2}\mid_0^x + \frac{u^2}{2}\mid_0^z = \frac{yx^2}{2} + \frac{z^2}{2}$$

$$R(x,y,z) = -\int_0^x 0\ du = 0$$

de esta manera

$$F(x,y,z) = \left(0, \frac{yx^2}{2} + \frac{z^2}{2}, 0\right)$$

es tal que

$$rot\ F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{yx^2}{2} + \frac{z^2}{2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{yx^2}{2} + \frac{z^2}{2}\right), 0, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{yx^2}{2} + \frac{z^2}{2}\right)\right)$$

$$= (-z, 0, xy)$$

$$= G(x,y,z)$$

Ejemplo Sea $G(x,y,z) = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$. Hallar F tal que rot F=G

Solución En este caso se tiene

$$G(x,y,z) = (2,1,3) = (L(x,y,z), M(x,y,z), N(x,y,z)) \ \Rightarrow\ L(x,y,z) = 2$$

$$G(x,y,z) = (2,1,3) = (L(x,y,z), M(x,y,z), N(x,y,z)) \ \Rightarrow\ M(x,y,z) = 1$$

$$G(x,y,z) = (2,1,3) = (L(x,y,z), M(x,y,z), N(x,y,z)) \ \Rightarrow\ N(x,y,z) = 3$$

de esta manera

$$L(x,y,z) = 2 \ \Rightarrow\ L(0,y,u) = 2$$

$$M(x,y,z) = 1 \ \Rightarrow\ M(t,y,z) = 1$$

$$N(x,y,z) = 3 \ \Rightarrow\ N(t,y,z) = 3$$

por lo tanto si $x_0 = z_0 = 0$

$$P(x,y,z) = 0$$

$$Q(x,y,z) = \int_0^x 3\ dt - \int_0^z 2\ du = 3t\mid_0^x - 2t\mid_0^z = 3x - 2z$$

$$R(x,y,z) = -\int_0^x \ du = -x$$

de esta manera

$$F(x,y,z) = (0, 3x - 2z, -x)$$

es tal que

$$rot\ F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 3x - 2y & -x \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial(-x)}{\partial y} - \frac{\partial(3x-2z)}{\partial z}, -\frac{\partial(-x)}{\partial x}, \frac{\partial(3x-2z)}{\partial x} \right) \\
&= (2,1,3) \\
&= G(x,y,z)
\end{aligned}
$$

Definición 5. *Sea $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ continua. Decimos que G es un campo solenoide si existe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tal que*

$$G = rot\ F$$

Para un campo dado $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $div\ G = 0$, hemos encontrado un campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $rot\ F = G$, pero esta función F no es única. Si sumamos al campo F cualquier gradiente derivable con continuidad $\nabla\varphi$ obtenemos otra solución ya que

$$rot\ (F + \nabla\varphi) = rot\ F + rot\ \nabla\varphi = rot\ F = G$$

puesto que $rot\ (\nabla\varphi) = 0$.
Si H es otro campo tal que de $rot\ H = G$ entonces

$$rot\ H = rot\ F$$

$$\Rightarrow\ rot\ H - rot\ F = 0$$

$$\Rightarrow\ rot(H - F) = 0$$

$$\Rightarrow\ H - F = \nabla\varphi, \quad p.\ a.\ \ \nabla\varphi$$

$$\Rightarrow\ H = F + \nabla\varphi$$