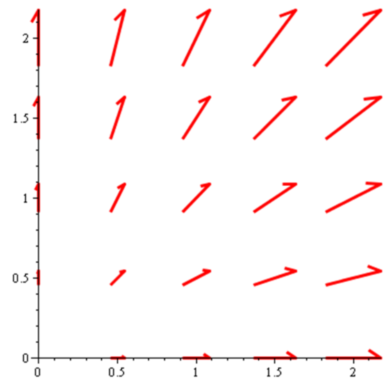
Ejemplo Dado el campo vectorial $F(x, y) = (x, y)$, calcular la divergencia en el punto $(1, 1)$

Solución En este caso geometricamente el campo se ve



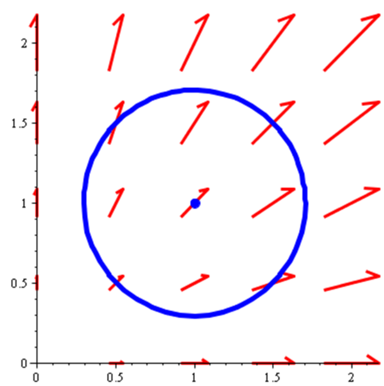
y nosotros queremos medir la expansión del flujo del campo que pasa através del punto, para ello definimos una región D alrededor del punto, en este caso

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq \epsilon\}$$

cuya frontera esta parametrizada por $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (\epsilon \cos(t), \epsilon \operatorname{sen}(t)) + (1, 1)$$

queremos medir la expansión del flujo que pasa a través de D



Usando la definición de divergencia

$$div\ F = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int_{Fr(D)} F}{\acute{a}rea\ (D)}$$

en este caso

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\int_0^{2\pi} F(\epsilon \cos(t) + 1, \epsilon \operatorname{sen}(t) + 1) \cdot (\epsilon \cos(t), \epsilon \operatorname{sen}(t))\ dt}{\pi \epsilon^2}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\int_0^{2\pi} (\epsilon\cos(t)+1, \epsilon\,\text{sen}(t)+1)\cdot(\epsilon\cos(t), \epsilon\,\text{sen}(t))\ dt}{\pi\epsilon^2}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\int_0^{2\pi} (\epsilon^2+\epsilon(\cos(t)+\text{sen}(t))\ dt}{\pi\epsilon^2}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{2\pi\epsilon^2}{\pi\epsilon^2} = 2$$

Mismo resultado se obtiene si usamos la definición

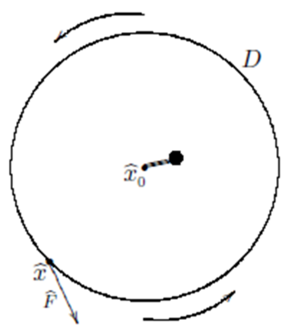
$$div\ F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

en este caso

$$div\ F = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 1 + 1 = 2$$

Rotacional de un Campo Vectorial en el Plano $\mathbb{R}^2$

Supongamos que tenemos un disco D de radio $r > 0$, el cual se encuentra sujeto en un punto $\hat{x}_0$ del plano. Si en un punto $\hat{x}$ del perímetro del disco D aplicamos una fuerza, se espera que se produzca una rotación

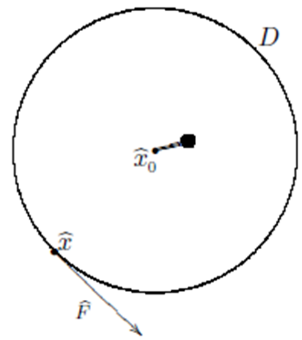


¿ Cómo medimos la rotación ? Al perecer dependerá de la fuerza aplicada en $\hat{x}$. Es decir nos referimos al ángulo que forma dicha fuerza y el disco en $\hat{x}$

Si $T_{\hat{x}}$ es un vector unitario tangente a la circunferencia en el punto $\hat{x}$, la parte de F que actua para producir una rotación es justo la componente de F a lo largo de $T(\hat{x})$ la cual está dada por

$$F \cdot T(\hat{x})$$

que también servira para medir el ángulo entre F y D en $\hat{x}$. Consideraremos rotación con orientación positiva la que apunta en dirección antihoraria



Por lo que el número $F \cdot T(\hat{x})$ es una manera de medir la fuerza ejercida y que produce rotación sobre el disco D. Si este número es negativo significa que la fuerza ejercida actúa en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj, y si es positivo, en la contraria

Una vez que ha sido determinada la fuerza sobre el disco D, necesitamos determinar la intensidad del movimiento de rotación que produce dicha fuerza.

Según la ley de la inercia *Si en un instante dado un objeto es golpeado por una fuerza que produce una aceleración de $F \cdot T_x$ (unidades de longitud/unidades de tiempo), lo que significa que en una unidad de tiempo recorrera una distancia de $F \cdot T_x$ unidades de longitud*

Ahora bien para obtener el número de revoluciones que el disco D realizará en una unidad de tiempo, bastará con dividir la distancia que recorreria en línea recta $F \cdot T(\hat{x})$ por su perímetro $2\pi r$ de tal forma que el número

$$\frac{F \cdot T(\hat{x})}{2\pi r}$$

será una medida de la rotación producida por la fuerza F sobre D y su signo determinará la orientación en la que rota

Si ahora tomamos un número finito de puntos $\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_k$ en el disco D y suponemos que en cada uno de ellos actúa una fuerza $F_1, ..., F_k$, respectivamente, entonces el movimiento de rotación producido por estas fuerzas estará dado por

$$\frac{F_1 \cdot T_{\hat{x}_1} + F_2 \cdot T_{\hat{x}_2} + \cdots F_k \cdot T_{\hat{x}_k}}{2\pi r}$$

Dado ahora todo un campo de fuerzas que actua en cada punto de la circunferencia, vamos a tratar de calcular una fuerza promedio ejercida por el campo que actúa sobre la circunferencia.

Supongamos que el campo de fuerzas esta representado por $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Asociado a este campo definimos el campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$f(\hat{x}) = F(\hat{x}) \cdot T_{\hat{x}}$$

y parametrizamos la curva

$$\alpha(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)) + \hat{x}_0, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

por lo tanto la función $f \circ \alpha$ asocia a cada valor de t el valor de la fuerza ejercida por el campo F en el punto $\alpha(t)$ y su valor promedio es

$$F_p = \frac{\int_0^{2\pi} f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|}{2\pi r}\ dt = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|\ dt$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}\left(F(\alpha(t))\cdot\frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}\right)\|\alpha'(t)\|\ dt$$
$$= \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} F(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)\ dt$$

y por tanto el número

$$\frac{F_p}{2\pi r} = \frac{= \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} F(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)\ dt}{2\pi r}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\int_0^{2\pi} F(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)\ dt}{\pi r^2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\int_0^{2\pi} F(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)\ dt}{\acute{a}rea\ D}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\int_\alpha F\ dt}{\acute{a}rea\ D}\right)$$

será entonces una medida de la rotación promedio producida por el campo F, es decir, la cantidad de revoluciones por unidad de tiempo.
La rotación promedio de puede escribir

$$rot_p F(\hat{x}) = \frac{1}{4}\left(\frac{\int_\alpha F\ dt}{\acute{a}rea\ D}\right)$$

Ahora bien si existe

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{4}\left(\frac{\int_\alpha F\ dt}{\acute{a}rea\ D}\right)$$

a ese valor lo podemos interpretar como la rotación producida por el campo F en el punto $\hat{x}_0$
el límite anterior es equivalente

$$\lim_{r\to 0}\frac{\int_\alpha F\ dt}{\acute{a}rea\ D}$$

por lo que a dicho límite lo llamaremos el rotacional de F en $\hat{x}_0$

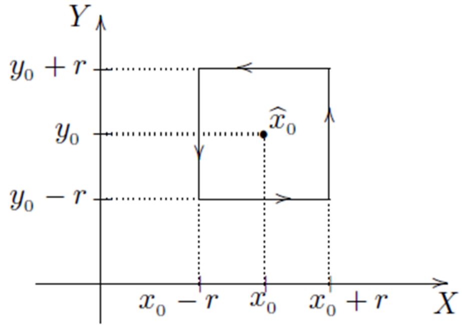
Definición 1. *Sean $F : D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ continua en la región D, $\hat{x}_0\in D$, donde D es el disco de radio $r>0$ con centro en $\hat{x}_0$ y $\alpha = Fr(D)$. Decimos que F produce rotación en el punto $\hat{x}_0$ si existe*

$$\lim_{r\to 0}\frac{\int_\alpha F\ dt}{\acute{a}rea\ D}$$

y que denotaremos por $rot\ F(\hat{x}_0)$ es decir

$$rot\ F(\hat{x}_0) = \lim_{r\to 0}\frac{\int_\alpha F\ dt}{\acute{a}rea\ D}$$

Ejemplo Dado el campo $F = (M, N)$ y $D = [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r]$



Muestre que

$$rot\ F(\hat{x}_0) = \frac{\partial N}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial M}{\partial y}(\hat{x}_0)$$

Solución En este caso tenemos que

$$\int_\alpha F = \int_{-r}^{r} F(x_0 + t, y_0 - r) \cdot (1, 0)\ dt + \int_{-r}^{r} F(x_0 + r, y_0 + t) \cdot (0, 1)\ dt$$

$$+ \int_{-r}^{r} F(x_0 + t, y_0 + r) \cdot (-1, 0)\ dt + \int_{-r}^{r} F(x_0 - r, y_0 + t) \cdot (0, -1)\ dt$$

$$= \int_{-r}^{r} M(x_0 + t, y_0 - r)\ dt + \int_{-r}^{r} N(x_0 + r, y_0 + t)\ dt - \int_{-r}^{r} M(x_0 + t, y_0 + r)\ dt - \int_{-r}^{r} N(x_0 - r, y_0 + t)\ dt$$

$$= \int_{-r}^{r} N(x_0 + r, y_0 + t) - N(x_0 - r, y_0 + t)\ dt + \int_{-r}^{r} M(x_0 + t, y_0 + r) - M(x_0 + t, y_0 - r)\ dt$$

$$\underbrace{=}_{\int_a^b f(x)\ dx = f'(\xi)(b-a)} 2r[N(x_0 + r, y_0 + \xi_N) - N(x_0 - r, y_0 + \xi_N)] - 2r[M(x_0 + \xi_M, y_0 + r) - M(x_0 + \xi_M, y_0 - r)]$$

$$\underbrace{=}_{f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)} 2r\left[2r\frac{\partial N}{\partial x}(x_0 + \xi_{N_1}, y_0 + \xi_N)\right] - 2r\left[2r\frac{\partial M}{\partial y}(x_0 + \xi_M, y_0 + \xi_{M_1}\right]$$

$$= 4r^2\left(\frac{\partial N}{\partial x}(x_0 + \xi_{N_1}, y_0 + \xi_N)\right) - 4r^2\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x_0 + \xi_M, y_0 + \xi_{M_1}\right)$$

$$= 4r^2\left(\frac{\partial N}{\partial x}(x_0 + \xi_{N_1}, y_0 + \xi_N) - \frac{\partial M}{\partial y}(x_0 + \xi_M, y_0 + \xi_{M_1}\right)$$

Por lo tanto

$$rot\ F(x_0, y_0) = \lim_{r \to 0} \frac{\int_\alpha F}{4\pi r}$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{4r^2\left(\frac{\partial N}{\partial x}(x_0 + \xi_{N_1}, y_0 + \xi_N) - \frac{\partial M}{\partial y}(x_0 + \xi_M, y_0 + \xi_{M_1}\right)}{4r^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{r\to 0} \frac{\partial N}{\partial x}(x_0+\xi_{N_1}, y_0+\xi_N) - \frac{\partial M}{\partial y}(x_0+\xi_M, y_0+\xi_{M_1}) \\
&= \frac{\partial N}{\partial x}(x_0,y_0) - \frac{\partial M}{\partial y}(x_0,y_0)
\end{aligned}
$$

Dado un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y una región D alrededor del punto y el campo
$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$, es de clase C^1, entonces por el teorema de Green

$$
\begin{aligned}
\int_{Fr(D)} &= \int\int_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\, dx\, dy \\
&\underbrace{=}_{Teorema\ del\ valor\ medio} (\acute{a}rea\ (D))\left(\frac{\partial N}{\partial x}(\overline{x},\overline{y}) - \frac{\partial M}{\partial y}(\overline{x},\overline{y})\right)
\end{aligned}
$$

para algún punto $(\overline{x},\overline{y}) \in D$
Por lo tanto para calcular la divergencia

$$
div\ F = \lim_{\acute{a}rea(D)\to 0} \frac{\int_{Fr(D)}}{\acute{a}rea(D)}
$$

en este caso

$$
\begin{aligned}
div\ F &= \lim_{\acute{a}rea(D)\to 0} \frac{(\acute{a}rea\ (D))\left(\frac{\partial N}{\partial x}(\overline{x},\overline{y}) - \frac{\partial M}{\partial y}(\overline{x},\overline{y})\right)}{\acute{a}rea\ (D)} \\
&= \lim_{\acute{a}rea(D)\to 0} \left(\frac{\partial N}{\partial x}(\overline{x},\overline{y}) - \frac{\partial M}{\partial y}(\overline{x},\overline{y})\right) \\
&= \frac{\partial N}{\partial x}(x_0,y_0) - \frac{\partial M}{\partial y}(x_0,y_0)
\end{aligned}
$$

Definición 2. *Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $F = (M, N)$ tal que $= \frac{\partial N}{\partial x}$, $= \frac{\partial M}{\partial y}$ existen para toda $\hat{x}$ en la región D. Definimos el rotacional de F en $\hat{x} \in D$, que denotamos por rot $F(\hat{x})$, como*

$$
rot\ F(\hat{x}) = \frac{\partial N}{\partial x}(\hat{x}) - \frac{\partial M}{\partial y}(\hat{x})
$$