Serie de Potencias

Definición 1. *A una serie de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

donde $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ son constantes y $c \in \mathbb{R}$ es fijo, se le llama serie de potencias alrededor de c.

Definición 2. *Cuando $c = 0$, tenemos la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

y en este caso decimos que la serie de potencias es alrededor del origen.

Si consideramos las series de potencias como funciones de x podemos escribir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \quad \text{ó} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

nos preguntamos entonces cual es el dominio de tales funciones, es decir para que valores de x la serie dada converge.

Teorema 1. *Si la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

converge para algunos $x_1 \neq c$, entonces converge absolutamente cuando $|x-c| < |x_1 - c|$; esto es, $\forall\ x \in (c-\epsilon, c+\epsilon)$ donde $\epsilon = |x_1 - c|$

Demostración. Supongamos que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

converge para algún $x_1 \neq c$. Sea $\epsilon = |x_1 - c|$ y elegimos $x \in (c-\epsilon, c+\epsilon)$.
Sabemos que $a_n(x_1-c)^n \to 0$ por lo tanto la sucesión $\{a_n(x_1-c)^n\}$ es acotada por lo que existe $M > 0$ tal que $\forall\ n$

$$|a_n(x_1-c)^n| < M$$

$$\Rightarrow\ |a_n||(x_1-c)^n| < M$$

ahora bien si $x \in (c-\epsilon, c+\epsilon)$, entonces $|x-c| < \epsilon$. Por lo que $\forall\ n$

$$|a_n(x-c)^n| = |a_n||(x-c)^n| = |a_n||(x_1-c)^n| \left|\frac{x-c}{x_1-c}\right|^n$$

$$< M\left|\frac{x-c}{x_1-c}\right|^n = Mr^n, \quad \textit{donde} \quad r = \left|\frac{x-c}{x_1-c}\right|$$

Como $0 < r < 1$ entonces $r = \left|\dfrac{x-c}{x_1-c}\right| < 1$. Por lo que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} Mr^n$$

es una serie geométrica convergente y por el criterio de comparación la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-c)^n|$$

converge $\square$

Corolario 1. *Si la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *no converge absolutamente para algún* $x_1 \neq c$, *entonces diverge cuando* $|x-c| > |x_1-c|$; *esto es, para toda* x *fuera del intervalo* $[c-\epsilon, c+\epsilon]$ *dónde* $\epsilon = |x_1-c|$

Demostración. Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1-c)^n$ no converge absolutamente, y $|x_2-c| > |x_1-c|$. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_2-c)^n$ convergiera entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1-c)^n$ convergeria absolutamnete lo cual no puede ocurrir $\square$

Corolario 2. *El conjunto de puntos* x *para el cual una serie de potencias dada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *converge es un intervalo no vacio centrado en* c, *es decir, debe ser uno de los siguientes* $\{c\}$, $\mathbb{R}$ *o un intervalo* $(c-\rho, c+\rho)$ *con* $\rho > 0$. *La serie converge absolutamente en el interior del intervalo, pero puede o no puede converger en los extremos*

Demostración. Sea

$$A = \left\{ x \;\Big|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \quad \textit{converge} \right\}$$

y supongamos que $A \neq \{c\}$ y $A \neq \mathbb{R}$. Entonces existe $x_0 \neq c$ tal que la serie dada diverge cuando $x = x_0$ segun los resultados anteriores la serie diverge para todo x fuera del intervalo $[c-\epsilon, c+\epsilon]$, donde $\epsilon = |x_0 - c|$. Por tanto $A \subset [c-\epsilon, c+\epsilon]$ por lo que A es un conjnuto acotado de ahí el conjunto

$$B = \left\{ |x-c| \;\Big|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \quad \textit{converge} \right\} = \{|x-c| \mid x \in \; A\}$$

es un conjunto acotado no vacío y por lo tanto, tiene una mínima cota superior a la cual llamamos $\rho = \sup B$. Vamos a probar que

$$(c-\rho, c+\rho) \subset A \subset [c-\rho, c+\rho]$$

supongamos que $x \in (c-\rho, c+\rho)$. Entonces $|x-c| < \rho = \sup B$ asi que existe $|x_1 - c| \in B$ tal que $|x-c| < |x_1 - c|$. Esto es, existe $x_1 \in A$ tal que

$$|x-c| < |x_1 - c|$$

y según los resultados anteriores la serie converge absolutamente en x. Por lo tanto $(c-\rho, c+\rho) \subset A$.
Supongamos ahora que $x \in A$. Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

converge asi que $|x-c| \in B$. Así

$$|x-c| \leq \sup B = \rho$$

esto es

$$c-\rho \leq x \leq c+\rho$$

es decir

$$x \in [c-\rho, c+\rho]$$

por lo tanto

$$A \subset [c-\rho, c+\rho]$$

$\square$

Definición 3. *Al conjunto de números reales x para los cuales la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

converge, intervalos de convergencia de la serie.

Definición 4. *En la definición anterior si el intervalo es acotado, llamamos al número ρ radio de convergencia de la serie. Si la serie converge solamente en $x = c$ decimos que el radio de convergencia es 0, mientras que si la serie converge para todo número real, decimos que el radio de convergencia es $+\infty$*

Lo primero que vamos a determinar cual es su dominio de convergencia.

Ejemplo Encontrar el intervalo de convergencia y el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n\ 2^n}$$

Solución En este caso usamos el criterio de la razón

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)\ 2^{n+1}} \frac{n\ 2^n}{(x-3)^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \left| \frac{x-3}{2} \right|$$

$$= \left| \frac{x-3}{2} \right|$$

Entonces la serie converge si $L < 1$ esto es la serie converge absolutamente si $|x-3| < 2$ y diverge si $L > 1$ esto es diverge si $|x-3| > 2$ por lo que la serie de potencias converge absolutamente en el intervalo $(1,5)$ y diverge fuera del intervalo $[1,5]$.
Vamos a ver los extremos en $x = 1$ se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-3)^n}{n\ 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n\ 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

la cual es la serie armónica alternante que es convergente
en $x = 5$ se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5-3)^n}{n\ 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2)^n}{n\ 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)^n}{n}$$

la cual es la serie armónica que es divergente, por lo tanto el intervalo de convergencia para la serie de potencias dada es $[1,5)$ y el radio de convergencia es 2

Ejemplo Encontrar el intervalo de convergencia y el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(x-3)^n}{2^n}$$

Solución En este caso usamos el criterio de la razón

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2(x-3)^{n+1}}{2^{n+1}} \frac{n^2\ (x-3)^n}{2^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2(x-3)^{n+1}2^n}{n^2(x-3)^n 2^{n+1}} \right| = \left| \frac{x-3}{2} \right|$$

$$= \left| \frac{x-3}{2} \right|$$

Entonces la serie converge si $L < 1$ esto es la serie converge absolutamente si $|x-3| < 2$ y diverge si $L > 1$ esto es diverge si $|x-3| > 2$ por lo que la serie de potencias converge absolutamente en el intervalo $(1,5)$ y diverge fuera del intervalo $[1,5]$.
Vamos a ver los extremos en $x = 1$ se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(1-3)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2$$

la cual divergente
en $x = 5$ se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(5-3)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2(2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2$$

la cual divergente

Ejemplo La serie

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots \quad converge \quad si \quad |x| < 1$$

ya que si

$$S_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} S_n &= \lim_{n \to \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \\ &= \frac{1}{1 - x} \end{aligned}$$

por lo tanto el intervalo de convergencia es $x \in (-1, 1)$

Ejemplo La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n \quad converge \quad si \quad x = 0$$

Esto se puede determinar usando el criterio del cociente, tenemos que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} = \lim_{n \to \infty} (n+1)x \quad la \quad cual \quad converge \quad si \quad x = 0$$

Ejemplo La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad converge \ \forall \ x \in \mathbb{R}$$

Esto se puede determinar usando el criterio del cociente, tenemos que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{x}{n+1} = 0 < 1 \quad por \quad tanto \quad converge \ \forall \ x \in \mathbb{R}$$

Ejemplo Aplicando el criterio del cociente, indique el intervalo de convergencia para la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$$

Solución Sea

$$a_n = \frac{x^n}{2^n}$$

según el criterio del cociente

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{x^n}{2^n}} \right| = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} |x| = \frac{1}{2}|x|$$

Se tiene que

$$\frac{1}{2}|x| < 1 \ \Leftrightarrow \ |x| < 2 \ \Leftrightarrow \ -2 < x < 2$$

por lo tanto el intervalo de convergencia es $x \in (-2, 2)$

Ejemplo Aplicando el criterio del cociente, indique el intervalo de convergencia para la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-5)^n}{4^n n}$$

Solución Sea

$$a_n = \frac{(-1)^n (x-5)^n}{4^n n}$$

según el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}(x-5)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)}}{\frac{(-1)^n (x-5)^n}{4^n n}} \right| = |x-5| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{4(n+1)} \right| = \frac{1}{4}|x-5|$$

Se tiene que

$$\frac{1}{4}|x-5| < 1 \;\Leftrightarrow\; |x-5| < 4 \;\Leftrightarrow\; 1 < x < 9$$

por lo tanto el intervalo de convergencia es $x \in (1, 9)$