Funciones Integrables

Lema 1. *Sena A y B dos conjuntos tales que $\forall\ a \in A\ \forall\ b \in B$ ocurre que $a \leq b$. Sean $A' \subset A$ y $B' \subset B$ tales que $\sup\ A' = \inf\ B'$ entonces*

$$\sup A = \inf B$$

Demostración. Si $\forall\ a \in A\ \forall\ b \in B$ ocurre que $a \leq b$ entonces

$$a \leq b \ \Rightarrow \ \sup A \leq b$$

$$\Rightarrow \ \sup A \leq \inf B \quad (1)$$

Por otro lado

$$A' \subset A \ \Rightarrow \ \sup A' \leq \sup A$$
$$B' \subset B \ \Rightarrow \ \inf B \leq \inf B'$$

por lo tanto

$$\inf B \leq \inf B' = \sup A' \leq \sup A \quad (2)$$

de (1) y (2) se concluye que

$$\sup A = \inf B$$

$\square$

Corolario 1. *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada en R. Si para alguna familia de particiones P_n ocurre que*

$$\inf\{\overline{S}(f,P_n) \mid P_n \text{ es particion de } R\} = \inf\{\underline{S}(f,P_n) \mid P_n \text{ es particion de } R\}$$

entonces f es integrable en R y

$$\int_R f = \inf\{\overline{S}(f,P_n) \mid P_n \text{ es particion de } R\} = \inf\{\underline{S}(f,P_n) \mid P_n \text{ es particion de } R\}$$

Ejemplo Mostrar que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x+y$ es integrable sobre $R = [0,1]\times[0,1]$

Solución Vamos a considerar las siguientes particiones

$$P_1 = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\} = P_2$$

$$P = P_1 \times P_2$$

Denotamos por R_{ij} cada subrectángulo inducido por P; es decir,

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right]$$

por lo que para cada subrectángulo, tenenmos

$$m_{ij} = f\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n}\right) = \frac{i-1}{n} + \frac{j-1}{n} = \frac{1}{n}(i+j-2)$$

$$M_{ij} = f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{i}{n} + \frac{j}{n} = \frac{1}{n}(i+j)$$

Por lo que el área de subrectángulo R_{ij} es

$$A(R_{ij}) = \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)\left(\frac{j}{n} - \frac{j-1}{n}\right) =$$

$$\frac{1}{n^2}[ij - i(j-1) - j(i-1) + (i-1)(j-1)] = \frac{1}{n^2}$$

Por lo tanto

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}(i+j-2)\frac{1}{n^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^3(i+j-2)}\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\left(ni + \frac{n(n+1)}{2} - 2n\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(n\frac{n(n+1)}{2} - 2n^2\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}(n^2(n+1) - 2n2)$$

$$= \frac{1}{n}(n+1-2)$$

$$= 1 - \frac{1}{n}$$

por lo que

$$\sup\left\{1 - \frac{1}{n}\right\} = 1$$

Ahora bien para las sumas superiores, tenemos

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}(i+j)\frac{1}{n^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^3(i+j)}\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\left(ni + \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(n\frac{n(n+1)}{2} + n\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{n}(n+1)$$
$$= 1 + \frac{1}{n}$$

por lo que

$$\text{ínf}\left\{1 + \frac{1}{n}\right\} = 1$$

Así hemos llegado a que:

$$\sup\left\{\underline{S}(f,P)\right\} = 1 = \text{ínf}\left\{\overline{S}(f,P)\right\}$$

según los resultados anteriores f es integrable

Teorema 1. *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada sobre el rectángulo R. Se tiene que f es integrable sobre R si y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe una P partición de R tal que*

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \epsilon$$

Demostración. $\Rightarrow)$
Sea $\epsilon > 0$ como f es integrable $\underline{\int}_R f = \overline{\int}_R f = I$ y por las propiedades del supremo sabemos que para $\frac{\epsilon}{2} > 0$ $\exists$ una $P\prime$ partición de R tal que

$$I - \frac{\epsilon}{2} \leq \underline{S}(f,P\prime) \leq I.$$

Por otra parte de las propiedades del ínfimo sabemos que $\exists$ una $Q\prime$ partición de R tal que

$$I \leq \overline{S}(f,Q\prime) \leq I + \frac{\epsilon}{2}.$$

Si hacemos $P = P\prime \bigcup Q\prime$ tenemos que

$$\underline{S}(f,P\prime) \leq \underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P\prime)$$

$\therefore$

$$I - \frac{\epsilon}{2} \leq \underline{S}(f,P) \leq \overline{S}(f,P) \leq I + \frac{\epsilon}{2}$$

$\therefore$

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) \leq I + \frac{\epsilon}{2} - (I - \frac{\epsilon}{2}) = \epsilon.$$

$\therefore$ f es integrable
$\Leftarrow)$
Tenemos que probar que la función es integrable es decir $\underline{\int}_R f = \overline{\int}_R f$ o equivalentemente $\underline{\int}_R f - \overline{\int}_R f = 0$ sabemos que

$$\underline{\int}_R f \leq \overline{\int}_R f \Rightarrow 0 \leq \overline{\int}_R f - \underline{\int}_R f.$$

Sea $\epsilon > 0$ por hipótesis, existe P partición de R tal que $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \epsilon$ por otra parte se tiene que:

$$\underline{S}(f,P) \leq \underline{\int}_R f \leq \overline{\int}_R f \leq \overline{S}(f,P)$$

$\therefore$

$$0 \leq \overline{\int}_R f - \underline{\int}_R f \leq \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \epsilon$$

$\therefore$

$$\overline{\int}_R f = \underline{\int}_R f$$

$\therefore$ f es integrable

$\square$

Teorema 2. *Si una función f es continua en un rectángulo $Q = [a,b] \times [c,d]$ entonces f es integrable en Q.*

Demostración. Tenemos que

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\Delta(R_{ij}) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\Delta(R_{ij}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(M_{ij} - m_{ij})\Delta(R_{ij})$$

$$< \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\epsilon}{A(R)}\Delta(R_{ij}) = \frac{\epsilon}{A(R)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\Delta(R_{ij}) = \frac{\epsilon}{A(R)}A(R)$$

La desigualdad se justifica de la siguiente forma:
Como f es continua en un conjunto cerrado y acotado entonces f es uniformemente continua $\therefore$ para

$$\overline{x_{ij}}, \quad \overline{y_{ij}} \in R_{ij} \quad \textit{con} \quad \|x_{ij} - y_{ij}\| < \delta \Rightarrow |f(x_{ij}) - f(y_{ij})| < \frac{\epsilon}{A(R)}$$

$\square$

Ejemplo Si f es una función integrable sobre R y $R_k \subset R$ entonces f es integrable sobre R_k

Demostración. Com f es integrable sobre R existe una partición P de R tal que

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \epsilon$$

Sean P_1 los $R_{i,j} \in P$ tal que $R_{ij} \subset R_k$ y sea P_2 los R_{ij} restantes, tenemos entonces que

$$\overline{S}(f,P) = \overline{S}(f,P_1) + \overline{S}(f,P_2)$$

$$\underline{S}(f,P) = \underline{S}(f,P_1) + \underline{S}(f,P_2)$$

por lo tanto

$$\overline{S}(f,P_1) - \underline{S}(f,P_1) + \overline{S}(f,P_2) - \underline{S}(f,P_2) = \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \epsilon$$

como cada término de la suma es positivo se tiene que

$$\overline{S}(f,P_1) - \underline{S}(f,P_1) < \epsilon$$

y tenemos una partición de $R_k \subset R$ donde f es integrable $\square$

Teorema 3. *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrable sobre R. Entonces existe $x_0 \in$ int(R) tal que f es continua en x_0*

Demostración. Como f es integrable sobre R existe una partición P de R tal que

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(M_{ij} - m_{ij})A(R) < A(R)$$

como los sumandos son términos no negativos, existen subíndices ij_1 tal que $M_{ij_1} - m_{ij_1} < 1$
pues de lo contrario si

$$M_{ij} - m_{ij} \geq 1 \;\forall\; i,j \;\Rightarrow\; (M_{ij} - m_{ij})A(R_{ij}) \geq A(R_{ij}) \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(M_{ij} - m_{ij})A(R_{ij}) \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(Rij) = A(R)$$

lo cual contradice nuestra suposición.
Ahora bien sea R_{ij_1} el subrectángulo de la partición P que cumple $M_{ij_1} - m_{ij_1} < 1$ donde $R_{ij_1} \subset R$.
Como f es integrable sobre R y $R_{ij_1} \subset R$ entonces f es integrable en R_{ij_1}, existe entonces una partición P_1 de R_{ij_1} tal que

$$\overline{S}(f,P_1) - \underline{S}(f,P_1) = \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{m_1}(M_{ij_1} - m_{ij_1})A(R_{ij_1}) < \frac{A(R_{ij_1})}{2}$$

Podemos asegurar que existe un subrectángulo R_{ij_2} inducido por P_1 con la propiedad $M_{ij_2} - m_{ij_2} < \dfrac{1}{2}$ donde

$$M_{ij_2} = \sup\{f(x) \mid x \in R_{ij_2}\} \quad m_{ij_2} = \text{ínf}\{f(x) \mid x \in R_{ij_2}\}$$

y además $R_{ij_2} \subset R_{ij_1}$.
Siguiendo este procedimiento, obtenemos una sucesión de rectángulos $\{R_{ij_k}\}$ anidados en $\mathbb{R}^2$ con la propiedad

$$M_{ij_k} - m_{ij_k} < \frac{1}{k} \quad \textit{donde} \quad M_{ij_k} = \sup\{f(x) \mid x \in R_{ij_k}\} \quad m_{ij_k} = \text{ínf}\{f(x) \mid x \in R_{ij_k}\} \quad R_{ij_{k+1}} \subset R_{ij_k}$$

Sabemos que

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} R_{ij_k} \neq \emptyset$$

Ahora, si

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} R_{ij_k}$$

vamos a comprobar que f es continua en x_0. Sea $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{N} < \epsilon$. Como $x_0 \in R_{ij_{N+1}} \subset R_{ij_N}$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$B_\delta(x_0) \subset R_{ij_N}$$

de tal forma que

$$m_{ij_N} \leq f(x) \leq M_{ij_N} \quad \forall \;\; x \in B_\delta(x_0)$$

como $M_{ij_N} - m_{ij_N} < \frac{1}{N}$ se tiene que

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{N} < \epsilon \quad \forall \ x \in B_\delta(x_0)$$

por lo tanto f es continua en x_0 $\square$