

## Independencia de la parametrización

El área de una superficie es independiente de la parametrización de ésta

**Definición 1.** Sea  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $S = \phi(D)$  una superficie parametrizada, y sea  $\varphi : \bar{D} \rightarrow D$  una función biyectiva definida en  $\bar{D} \subset \mathbb{R}^2$  la cual es tipo I y II a la vez, de clase  $c^1$ . Decimos que la función

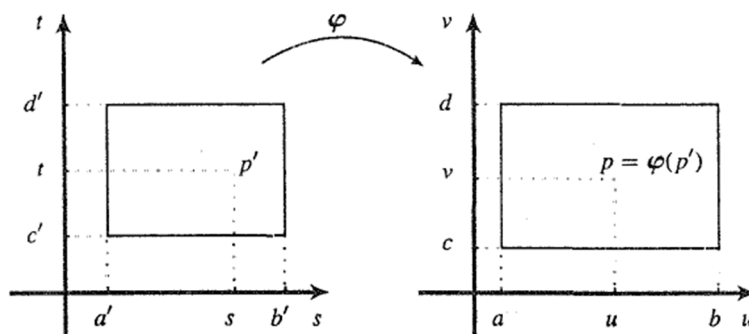
$$\phi \circ \varphi : \bar{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

es una **reparametrización** de  $S$

**Ejemplo** Sea  $\varphi : [a', b'] \times [c', d'] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la función dada por

$$\varphi(s, t) = \left( \frac{b-a}{b'-a'}(s-a') + a, \frac{d-c}{d'-c'}(t-c') + c \right)$$

esta función manda el rectángulo  $[a', b'] \times [c', d']$  en el rectángulo  $[a, b] \times [c, d]$  de manera biyectiva



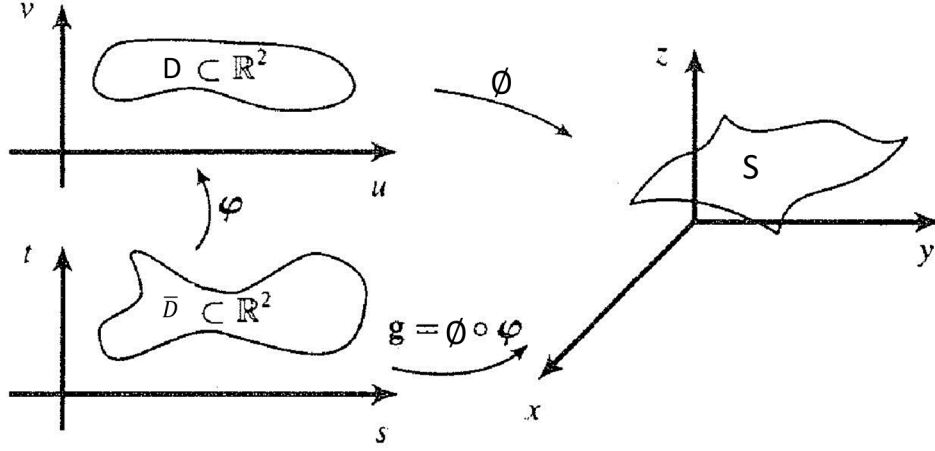
La función  $g : \phi \circ \varphi : [a', b'] \times [c', d'] \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$g(s, t) = (\phi \circ \varphi)(s, t) = \phi(\varphi(s, t)) = \phi \left( \frac{b-a}{b'-a'}(s-a') + a, \frac{d-c}{d'-c'}(t-c') + c \right)$$

tiene la misma imagen que  $\phi$ , es inyectiva de clase  $c^1$ . Se trata entonces de una función que parametriza a la superficie  $S$ , es decir

$$S = \phi([a, b] \times [c, d]) = g([a', b'] \times [c', d'])$$

Si  $g(s, t) = (\phi \circ \varphi)(s, t)$  entonces  $g$  es una reparametrización de  $\phi$



en tal caso se tiene que  $\varphi(s, t) = (\varphi_1(s, t), \varphi_2(s, t))$  en donde  $u = \varphi_1(s, t)$  y  $v = \varphi_2(s, t)$   $\therefore$  se tiene que  $g'(s, t) = \phi'(\varphi(s, t)) \cdot \varphi'(s, t)$  es decir

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s, t) = \frac{\varphi_1}{\partial s}(s, t) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u}(\varphi(s, t)) + \frac{\varphi_2}{\partial s}(s, t) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v}(\varphi(s, t))$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(s, t) = \frac{\varphi_1}{\partial t}(s, t) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u}(\varphi(s, t)) + \frac{\varphi_2}{\partial t}(s, t) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v}(\varphi(s, t))$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial g}{\partial t}(s, t) &= \frac{\varphi_1}{\partial s}(s, t) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u}(\varphi(s, t)) + \frac{\varphi_2}{\partial s}(s, t) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v}(\varphi(s, t)) \times \frac{\varphi_1}{\partial t}(s, t) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial u}(\varphi(s, t)) + \frac{\varphi_2}{\partial t}(s, t) \cdot \frac{\partial \phi}{\partial v}(\varphi(s, t)) \\ &= \left( \frac{\varphi_1}{\partial s}(s, t) \cdot \frac{\varphi_2}{\partial t}(s, t) - \frac{\varphi_1}{\partial t}(s, t) \cdot \frac{\varphi_2}{\partial s}(s, t) \right) \left( \frac{\partial \phi}{\partial u}(\varphi(s, t)) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(\varphi(s, t)) \right) \end{aligned}$$

donde

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial g}{\partial t}(s, t) = N_g \quad \left( \frac{\varphi_1}{\partial s}(s, t) \cdot \frac{\varphi_2}{\partial t}(s, t) - \frac{\varphi_1}{\partial t}(s, t) \cdot \frac{\varphi_2}{\partial s}(s, t) \right) = J_g(s, t)$$

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial u}(\varphi(s, t)) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(\varphi(s, t)) \right) = N_\phi$$

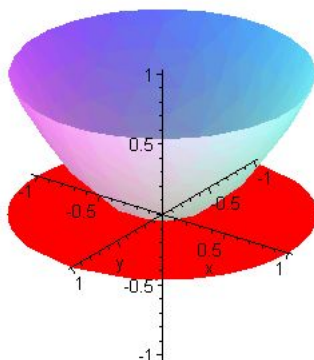
$\therefore$

$$N_g = J_g(s, t) N_\phi(u, v)$$

$$a(s) = \int \int_D \|N_\phi(u, v)\| \, du \, dv \quad \underbrace{\quad}_{(u,v)=\varphi(s,t)} \quad \int \int_{\bar{D}} \|N_\phi(\varphi(s, t))\| \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(s, t)} \right|$$

$\therefore$  el área de la superficie no depende de la parametrización

**Ejemplo** Vamos a calcular el área de la superficie  $z = x^2 + y^2$  sobre la región  
 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$



Para ello parametrizamos la superficie  $z = x^2 + y^2$  de la siguiente manera  $r(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$  y por lo tanto

$$\frac{\partial r}{\partial x} = (1, 0, 2x) \quad \frac{\partial r}{\partial y} = (0, 1, 2y) \quad \therefore \quad \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (-2u, -2v, 1)$$

$\therefore$  el área es

$$\begin{aligned} \iint_D \left\| \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} \right\| dA &= \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} du dv \quad \underbrace{=}_{\text{Polares}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta \\ &\underbrace{=}_{\substack{u=4r^2+1 \quad du=8r \\ r=0 \rightarrow u=1 \quad r=1 \rightarrow u=5}} \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \int_1^5 \sqrt{u} du d\theta = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \left( \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^5 \right) d\theta = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} (5^{\frac{3}{2}} - 1) d\theta = \frac{\pi}{6} (5^{\frac{3}{2}} - 1) \end{aligned}$$

Ahora vamos a dar una reparametrización de D de la siguiente forma, proponemos

$\tilde{D} = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 | s^2 + t^2 \leq \frac{1}{2}\}$  de esta manera si

$$s^2 + t^2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2s^2 + 2t^2 \leq 1 \Rightarrow s^2 + 2st + t^2 + s^2 - 2st + t^2 \leq 1 \Rightarrow (s+t)^2 + (s-t)^2 \leq 1$$

$\therefore$  podemos tomar  $u = s + t$  y  $v = (s - t)$  y por tanto nuestra reparametrización quedaría

$$g(s, t) = (s + t, s - t, 2s^2 + 2t^2)$$

donde

$$\frac{\partial g}{\partial s} = (1, 1, 4s) \quad \frac{\partial g}{\partial t} = (1, -1, 4t) \quad \therefore \quad \frac{\partial g}{\partial s} \times \frac{\partial g}{\partial t} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 4s \\ 1 & -1 & 4t \end{vmatrix} = (4t + 4s, 4s - 4t, -2)$$

$\therefore$  el área es

$$\iint_D \left\| \frac{\partial g}{\partial s} \times \frac{\partial g}{\partial t} \right\| dA = \iint_D \sqrt{(4s + 4t)^2 + (4s - 4t)^2 + (-2)^2} ds dt = \iint_D \sqrt{32t^2 + 32s^2 + 4} ds dt$$

$$\underbrace{=}_{\text{Polares}} 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{8r^2 + 1} r dr d\theta$$

$$\underbrace{=}_{\substack{u=8r^2+1 \\ r=0 \rightarrow u=1}} \frac{2}{8} \int_0^{2\pi} \int_1^5 \sqrt{u} du d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left( \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^5 \right) d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} \left( 5^{\frac{3}{2}} - 1 \right) d\theta = \frac{\pi}{6} \left( 5^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$$

$\substack{du=16r \\ r=\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow u=5}$