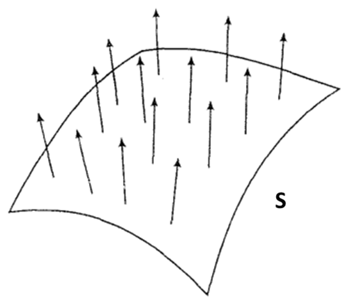
Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ se dirá orientable si es posible decidir sin ambiguedad cuál es cada uno de los lados de la superficie
Una función $N : S \to \mathbb{R}^3$, definida en los puntos $q \in S$, tal que a cada $q \in S$ le asocia un vector $N(q) \in \mathbb{R}^3$, no nulo, ortogonal a S, se dice ser un campo de vectores normales a S.



Decir que una superficie es orientable, significa que podemos tener un campo de vectores normales a S, $N : S \to \mathbb{R}^3$, que no cambia repentinamente de un punto a otro es decir que este campo N sea continuo en S

$$\forall q,\ q' \ \in \ S \quad \|q - q'\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(q) - f(q')\| < \epsilon$$

Ejemplo La banda de Moebius parametrizada por

$$f(u,v) = \left(\left(1 - v \operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos(u), \left(1 - v \operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\operatorname{sen}(u), v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \quad v \in [-1,1], \quad u \in [0, 2\pi]$$

es tal que

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \left(-\frac{v}{2}\cos\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u) - \left(1 - v\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\operatorname{sen}(u), -\frac{v}{2}\cos\left(\frac{u}{2}\right)\operatorname{sen}(u) + \left(1 - v\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u), \frac{v}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u), -\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\operatorname{sen}(u), \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} = N_f =$$

$$\left(-\frac{v}{2}\operatorname{sen}(u) + \cos(u)\cos\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{v}{2}\cos(u)\operatorname{sen}(u), \frac{v}{2}\cos(u) + \operatorname{sen}(u)\cos\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{v}{2}\operatorname{sen}^2(u), \left(1 - v\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\right)$$

Si consideramos los puntos sobre la banda de Möebius

$$q = \phi(0{,}001, -0{,}99) = (1{,}0049, 0{,}01, -0{,}99)$$

$$q' = \phi(6{,}2732, 0{,}99) = (,995, -0{,}01, -0{,}99)$$

entonces se tiene que

$$\|q - q'\| = 0{,}223$$

Mientras que

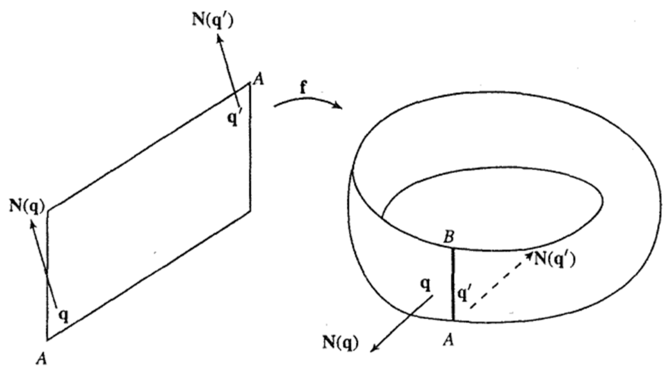
$$N(q) = \frac{N_\phi(q)}{\|N_\phi(q)\|} = (0{,}9014, -0{,}4329, 0{,}0045)$$

$$N(q') = \frac{N_\phi(q')}{\|N_\phi(q')\|} = (-0{,}8908, 0{,}4543, 0{,}0045)$$

por lo que

$$\|N(q) - N(q')\| = 1{,}998$$

la distancia no se hace pequeña



ahora bien

$$\lim_{(u,v)\to(0^+,0)} N_{f_{u,v}} = (1,0,0)$$

$$\lim_{(u,v)\to(2\pi^-,0)} N_{f_{u,v}} = (-1,0,0)$$

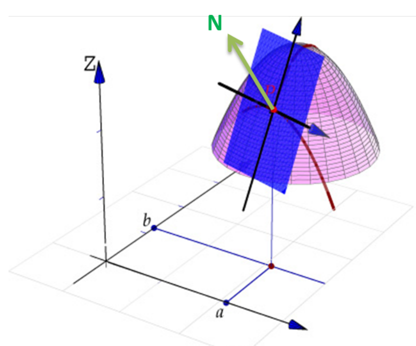
esto quiere decir que el campo N no es continuo

Superficies Orientables

Definición 1. *Sea S una superficie suave imagen de una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Se dice que S tiene orientación positiva si en cada uno de sus puntos el vector*

$$\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}, \qquad S$$

estan de lados distintos del plano tangente a S en el punto P

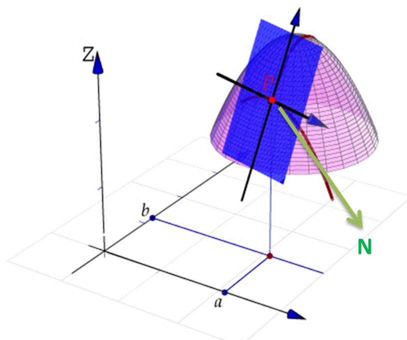


En tal caso el exterior de S está hacia donde apunta el vector N y el interior está hacia donde apunta -N

Definición 2. *Sea S una superficie suave imagen de una función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.*
Se dice que S tiene orientación negativa si en cada uno de sus puntos el vector

$$\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}, \qquad S$$

estan del mismo lado del plano tangente a S en el punto P



En tal caso el exterior de S está hacia donde apunta el vector -N y el interior está hacia donde apunta N

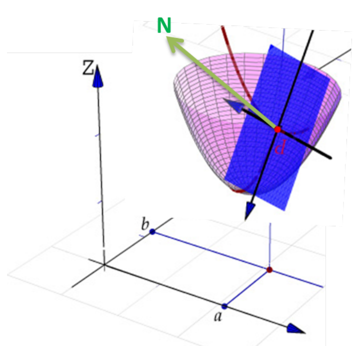
Ejemplo Sea la superficie $z = x^2 + y^2$ desde $z = 0,\ z = 10$. Una parametrización de esta superficie es:

$$f(u, v) = (u, v, u^2 + v^2) \qquad D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 10\}$$

en este caso se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial u} = (1, 0, 2u) \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial v} = (0, 1, 2v) \quad \therefore \quad \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} = (-2u, -2v, 1)$$

Tomando $N_{(1,1)} = (-2, -2, 1)$ que apunta hacia adentro en el punto P, por tanto la superficie y el vector normal en el punto P están en el mismo lado con respecto a el plano tangente y por lo tanto esta superficie tiene orientación negativa en P.



Considere ahora $\phi : \overline{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\phi(s,t) = (s+t, s-t, 2s^2+2t^2) \quad \overline{D} = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2+t^2 \leq 5\}$$

si consideramos

$$G : \overline{D} \to D \quad G(s,t) = (s+t, s-t)$$

entonces $\phi = f \circ G$ es una reparametrización de $z = x^2+y^2$ y en tal caso

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = (1,1,4s) \quad y \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = (1,-1,4t) \quad \therefore \quad \frac{\partial \phi}{\partial s} \times \frac{\partial \phi}{\partial t} = (4s+4t, 4s-4t, -2)$$

Tomando $N_{(1,0)} = (4,4,-2) = -2(-2,-2,1)$ que apunta hacia el exterior en el punto P, por tanto la superficie y el vector normal en el punto P están en lados contrarios con respecto a el plano tangente y por lo tanto esta superficie tiene orientación positiva en P.

En el ejemplo anterior la orientación de la superficie si dependio de la parametrización
Sea $g = f \circ \varphi : \overline{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización de una superficie S, donde $\varphi : \overline{D} \to D$ dada por (φ_1, φ_2) es una biyección de clase c^1 cuyo jacobiano es

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(s,t)} \neq 0 \quad \forall\ (s,t) \in \overline{D}$$

Ya se ha probado que

$$N_g(s,t) = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(s,t)} N_f(u,v)$$

por lo tanto
Si

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(s,t)} > 0$$

entonces $N_g(s,t)$ y $N_f(u,v)$ estaran en la misma dirección y diremos que g es una reparametrización de S que conserva la orientación
Si

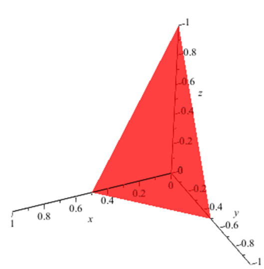
$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(s,t)} < 0$$

entonces $N_g(s,t)$ y $-N_f(u,v)$ estaran en la misma dirección y diremos que g es una reparametrización de S que invierte la orientación

Ejercicio Sea S la porción del plano

$$2x + 2y + z = 1$$

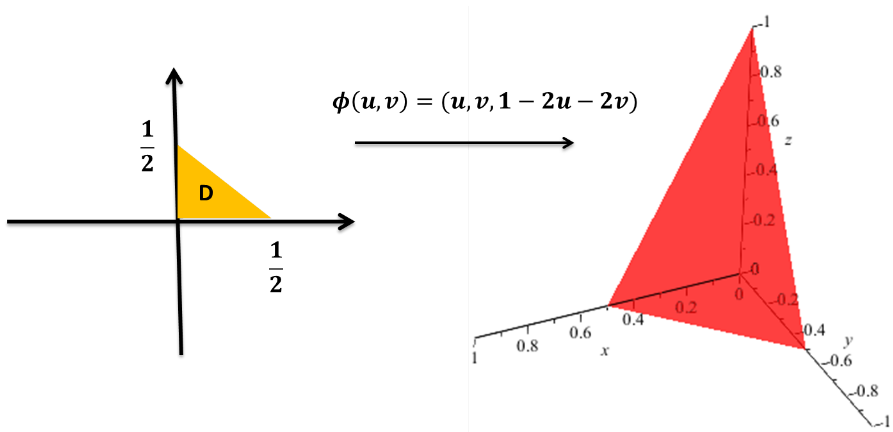
que se encuentra en el primer octante



(a) De una parametrización que tenga orientación positiva
(b) De una reparametrización que tenga orientación negativa

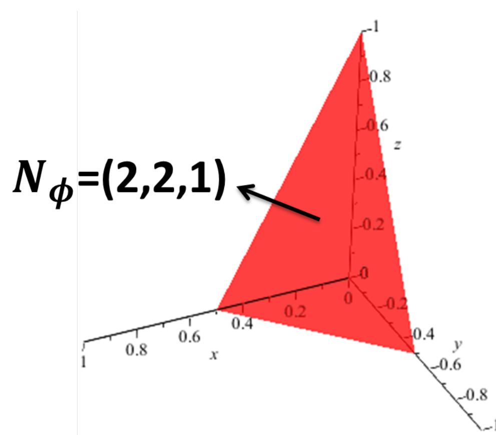
Solución Para el inciso (a) se tiene la parametrización

$$\phi(u,v) = (u, v, 1 - 2u - 2v)$$



de manera que

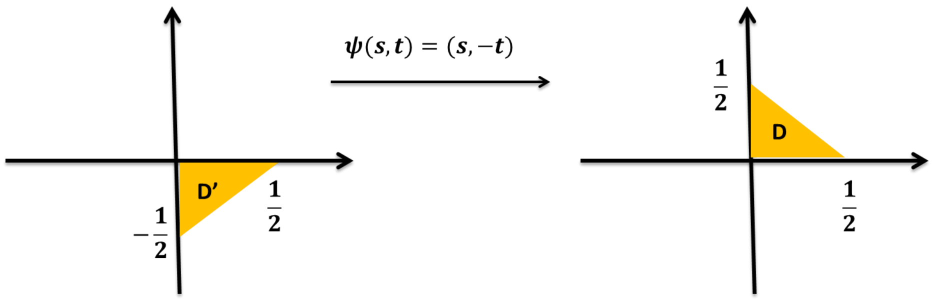
$$T_u = (1, 0, -2)$$
$$T_v = (0, 1, -2)$$
$$T_u \times T_v = \det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= (2, 2, 1)$$



Ahora consideramos la función

$$\psi(s,t) = (s,-t)$$

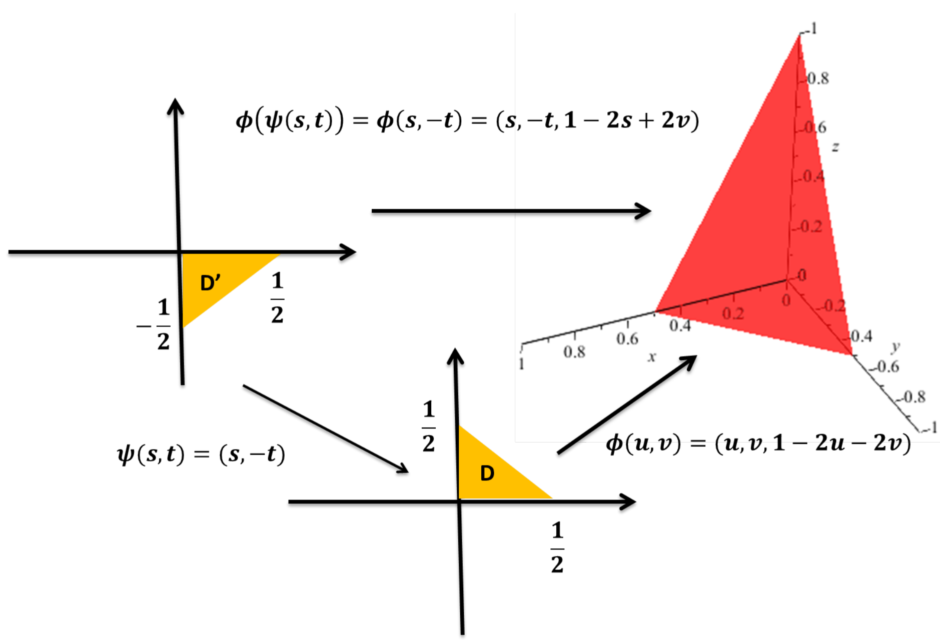
de tal manera que $\psi(D') = D$



y aplicamos la función ϕ

$$\phi(\psi(s,t)) = \phi(s,-t) = (s,-t,1-2s+2t)$$

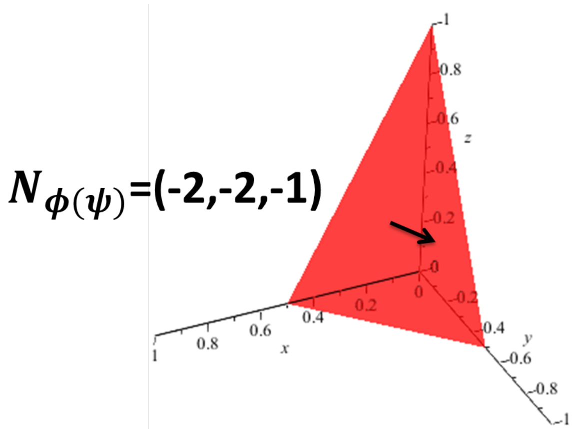
esta es una reparametrización del plano



y en este caso

$$T_s = (1,0,-2)$$
$$T_t = (0,-1,2)$$

$$T_u \times T_v = \det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= (-2, -2, -1)$$



y la orientación es negativa pues

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)} = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0$$