Parametrización de Superfícies z=f(x,y)

La parametrización se superficies de una función escalar $z = f(x, y)$, se obtiene al asignar un parámetro a cada una de las variables $x,\ y$ es decir

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

entonces la función

$$\phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

parametriza las superficies.

Ejemplo Parametrizar el plano π que pasa por los puntos $(1, 0, 1), (-2, 3, 0)$ y $(4, 1, -2)$

Solución Vamos a considerar las diferencias

$$(-2, 3, 0) - (1, 0, 1) = (-3, 3, -1) \qquad (4, 1, -2) - (1, 0, 1) = (3, 1, -3)$$

y con ellas podemos calcular el vector $n = (-3, 3, -1)\times(3, 1, -3) = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ -3 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-8, -12, -12)$

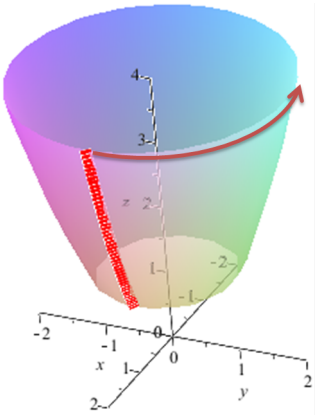
El cual es normal al plano generado por los vectores diferencia $(-3, 3, -1), (3, 1, -3)$. Ahora usamos la ecuación $\pi = (P - P_0) \cdot n = 0$ sustituyendo los valores tenemos

$$\pi = ((x, y, z) - (1, 0, 1)) \cdot (-8, -12, -12) = 0 \Rightarrow -8x - 12y - 12z + 20 = 0$$

$$\Rightarrow z = \frac{-20 + 12y + 8x}{-12} \qquad \therefore \qquad \phi(u, v) = \left(u, v, \frac{-20 + 12v + 8u}{-12}\right)$$

Parametrización de Superfícies de Revolución

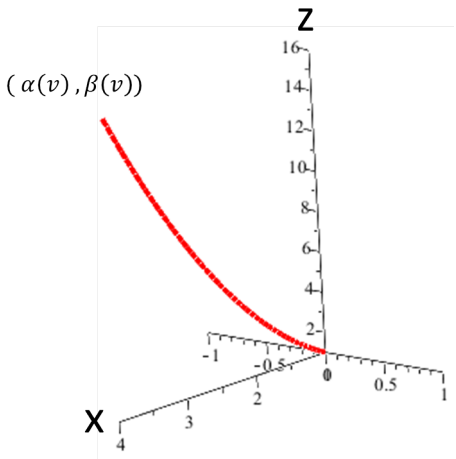
Supongase que se desea parametrizar una superficie que se obtiene al girar una curva alrededor de un eje coordenado



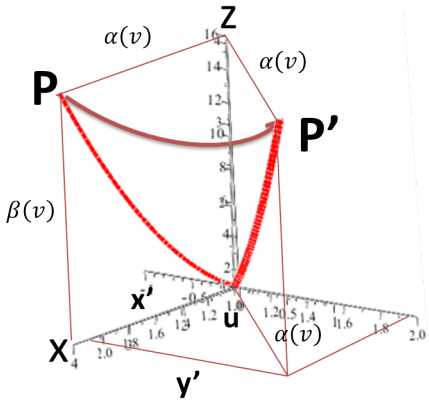
Supoóngase que la curva se encuentra en el plano XZ y que se gira alrededor del eje Z, dicha curva es parametrizada en el plano XZ por

$$(\alpha(v), \beta(v))$$

donde $v \in [a, b]$



En el plano XZ se toma un punto P, y esté se gira alrededor del eje Z un cierto ángulo u. Necesitamos ahora encontrar las coordenadas de P'



según el dibujo

$$\cos(u) = \frac{x'}{\alpha(v)}, \quad \operatorname{sen}(u) = \frac{y'}{\alpha(v)}, \quad z' = \beta(v)$$

Por lo que

$$x' = \cos(u)\alpha(v), \quad y' = \operatorname{sen}(u)\alpha(v), \quad z = \beta(v)$$

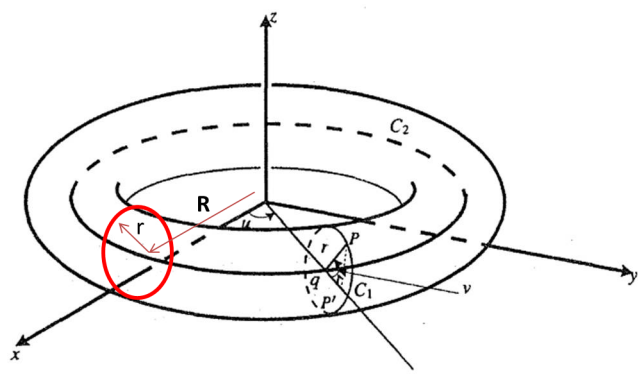
por lo que nuestra función $f(u,v)$ que parametriza la superficie obtenida al girar la curva situada en el plano XZ alrededor del eje Z sería

$$f(u,v) = (\cos(u)\alpha(v), \operatorname{sen}(u)\alpha(v), \beta(v))$$

donde $u \in [0, 2\pi], \quad v \in [a, b]$

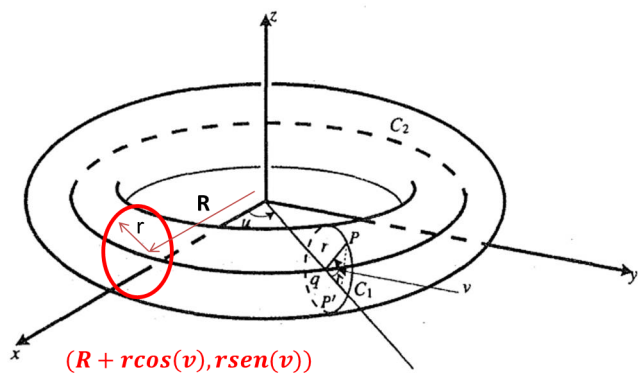
Ejemplo Parametrización del TORO

Para esto tomemos un circulo C_1 de radio r en el plano XZ y hagámoslo girar alrededor del eje Z. Llamemos R a la distancia del centro de C_1 al eje de rotación. Se tiene asi un circulo C_2 de radio r. A la superficie generada por C_1 se le llama TORO. Vamos a obtener su parametrización.



para ello parametrizamos el circulo C_2 con

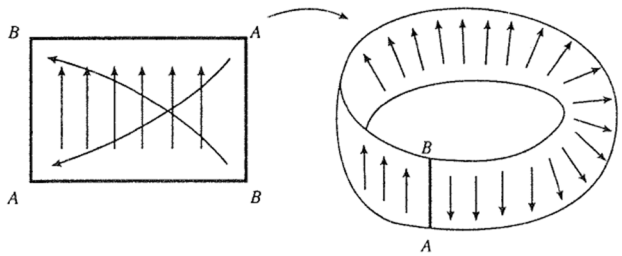
$$(R + r\cos(v), r\operatorname{sen}(v))$$



aplicando nuestra parametrización para girar alrededor del eje Z una curva situada en el eje XZ obtenemos la parametrización del Toro

$$f(u,v) = ((R + r\cos(v))\cos(u), (R + r\cos(v))\operatorname{sen}(u), r\operatorname{sen}(v))$$

Ejemplo Parametrización de la Banda de Möebius



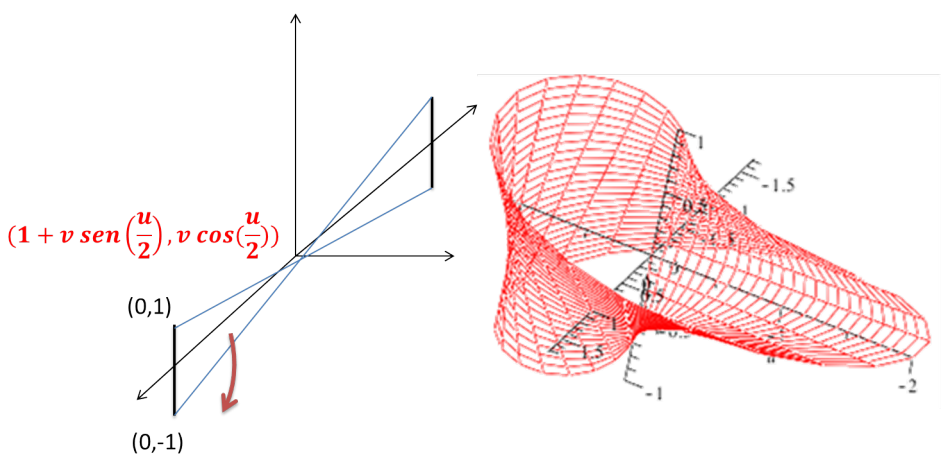
vamos a dar una parametrización y para ello usaremos la fórmula que parametriza una superficie de revolución para una curva

$$\gamma(t) = (x(t), 0, z(t))$$

en el plano XZ dada por

$$(v \operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right), v\cos\left(\frac{u}{2}\right) \qquad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [-1, 1]$$

Tomamos como generatriz un segmento de longitud v, en el plano XZ



este segmento debera girar un ángulo π y para ellos usamos la parametrización en el plano XZ

$$\left(1 + v \operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right), v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \qquad v \in [-1, 1], \quad u \in [0, 2\pi]$$

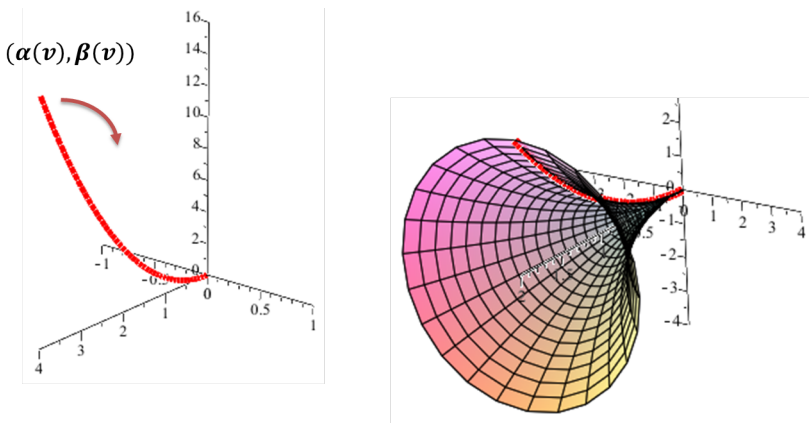
aplicando la fórmula obtenemos

$$f(u, v) = \left(\left(1 + v \operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos(u), \left(1 + v \operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\operatorname{sen}(u), v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \qquad v \in [-1, 1], \quad u \in [0, 2\pi]$$

donde

$$f(A) = f(0,-1) = (1,0,-1) = f(2\pi,1) \quad f(B) = (0,1) = (1,0,1) = f(2\pi,-1)$$

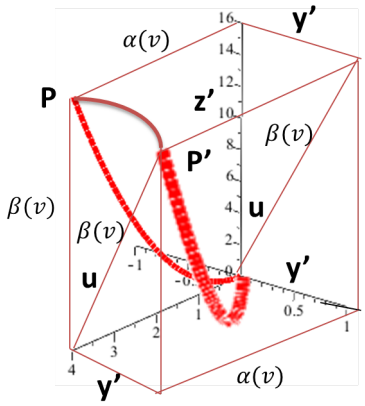
notamos la inversión de los extremos.
Supongase que se desea parametrizar una superficie que se obtiene al girar una curva alrededor de un eje coordenado



Supoóngase que la curva se encuentra en el plano XZ y que se gira alrededor del eje X, dicha curva es parametrizada en el plano XZ por

$$(\alpha(v), \beta(v))$$

donde $v \in [a,b]$ y $u \in [0, 2\pi]$. Si se toma un punto P sobre la curva y se gira un ángulo u alrededor del eje X se tiene



Para encontrar las coordenadas del punto P' se tiene que según el dibujo

$$\cos(u) = \frac{z'}{\beta(v)}, \quad \operatorname{sen}(u) = \frac{y'}{\beta(v)}$$

por lo tanto las coordenadas del punto P' serían

$$(x', y', z') = (\alpha(v), \beta(v)\,\mathrm{sen}(u), \beta(v)\cos(u))$$

y por lo tanto la función $f(u, v)$ que parametriza la superficie obtenida al girar una curva del plano XZ alrededor del eje X sería

$$f(u, v) = (\alpha(v), \beta(v)\,\mathrm{sen}(u), \beta(v)\cos(u))$$