Tarea 4 fecha de entrega 10 de febrero 2017

1.-Sea D una region no acotada, pruebe que para integrales múltiples de integrando positivo

$$Si \quad 0 \leq f(x,y) \leq g(x,y) \quad \forall (x,y) \in D$$

$$\int\int_D g(x,y)dxdy \quad converge \Rightarrow \int\int_D f(x,y)dxdy \quad converge$$

2.-Pruebe usando el ejercicio anterior que la integral

$$\int\int_D \left| \frac{y-x}{(x+y+1)((x^2+y^2)^5+1)} \right|$$

en $D = [0,\infty) \times [0,\infty)$ converge.

3.-Pruebe lo siguiente: Si $\int_c^\infty M(y)\ dy$ converge y si $|f(x,y)| \leq M(y) \quad \forall y \in [c,\infty]$ y $\forall x \in [a,b]$ suficiendemente grande, entonces $\int_c^\infty f(x,y)\ dy$ converge absoluta y uniformemente para $x \in [a,b]$.

4.-Use el ejercicio anterior para probar que $\int_0^\infty \frac{sen(xt)}{1+t^2}dt$ converge uniformemente $\quad \forall x$

5.-Definimos

$$f(x) = \int_0^1 e^{-xt}dt$$

pruebe que

(a) f es continua en $[0,1]$

(b)Evaluar la integral para obtener una fórmula explícita para f.

(c) Derivar f mediante la derivación de la integral. Evaluar la integral resultante y verificar que se obtiene el mismo resultado al derivar la fórmula encontrada en (b)

6.- Evaluar

$$\int_0^\infty \frac{senx}{x}dx$$

(a) Primero mostrando que $\int_0^\infty e^{-xy}dy = \frac{1}{x}$ si $x > 0$

(b) Use integración por partes para mostrar que $\int_0^\infty -e^{-xy}senxdx = \frac{1}{1+y^2} \quad$ si $y > 0$

(c) Use lo anterior para evaluar

$$\int_0^\infty \frac{sen(x)}{x}dx$$

7.-Unas de las funciones más importantes del análisis son la función gamma y la función beta definidas

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

Pruebe la identidad que relaciona la función Gamma con la función Beta

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

8.-La función de Bessel $J_0(x)$ puede definirse por

$J_0(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{cos(xt)dt}{\sqrt{1-t^2}}$

Pruebe que $J_0'' + \dfrac{1}{x}J_0' + J_0 = 0$

9.-Pruebe lo siguiente: Supongamos que una función F es continua $R = [a,b] \times [\alpha, \beta]$ donde $\beta < \infty$ ó $\beta = \infty$ y supóngase que para toda $x \in [a,b]$, f esta definida por

$$f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} F(x,y)dy$$

donde la integral es uniformemente convergente. Entonces f es continua en [a,b] y

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_a^b F(x,y)dx$$

10.-Pruebe lo siguiente: Suponga que $f(x,y)$ y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ continuas en $\{a \leq x \leq b, \alpha \leq y \leq \beta\}$ donde $\beta = \infty$. Supóngase que

$$F(x) = \int_{\alpha}^{\infty} f(x,y)dy$$

converge uniformemente en [a,b]. Entonces F es diferenciable en $[a,b]$ y

$$F'(x) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)dy$$