Tarea 6 fecha de entrega 31 de marzo 2017

1.-Calcule una parametrización para cada una de las siguientes superficies
(a) El elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(b) El paraboloide elíptico

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-z$$

(c) El hiperboloide de una rama

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(d) El hiperboloide de dos ramas

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(parametrice cada rama)
(e) El hiperboloide parabólico

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$$

2.-Describa cual es la superficie parametrizada por la siguiente función ϕ y encuentre una ecuación cartesiana que la determine

$$(a)\quad \phi(u,v)=(u\cos(v),u\operatorname{sen}(v),u^2),\quad u\in[0,\infty),\quad v\in[0,2\pi]$$

$$(b)\quad \phi(u,v)=(a\cos(v),a\operatorname{sen}(v),u),\quad u\in[-\infty,\infty),\quad v\in[0,2\pi]$$

$$(c)\quad \phi(u,v)=(a\operatorname{sen}(u)\cos(v),b\operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v),c\cos(u)),\quad u\in[0,\pi],\quad v\in[0,2\pi]$$

$$(d)\quad \phi(u,v)=(a(u+v),b(u-v),uv),\quad u\in(-\infty,\infty),\quad v\in(-\infty,\infty)$$

$$(e)\quad \phi(u,v)=(\cos(u)(2-\cos(v)),\operatorname{sen}(u)(2-cos(v)),\operatorname{sen}(v)),\quad u\in[-\pi,\pi],\quad v\in[-\pi,\pi]$$

3.-Suponga que tiene una trayectoria $(\alpha(v),\beta(v))$ contenida en el plano XY y suponga que la rota alrededor del eje Y, encuentre una parametrización de la superficie generada con esta rotación de la trayectoria
4.-Suponga que tiene una trayectoria $(\alpha(v),\beta(v))$ contenida en el plano XY y suponga que la rota alrededor del eje X, encuentre una parametrización de la superficie generada con esta rotación de la trayectoria
5.-Pruebe que el área de una superficie $S=\phi(D)$ esta dada poir

$$\int\int_D \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$$

con $E=E(u,v)=\|T_u\|^2$, $F=F(u,v)=\langle T_u,T_v\rangle$ y $G=G(u,v)=\|T_v\|^2$
6.-Pruebe que el área de una superficie $S=\phi(D)$ esta dada por

$$\int\int_D \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\,du\,dv$$

7.-Sea S la gráfica de una función de clase C^1 $z = f(x, y)$ sobre el conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$
(a) Pruebe que el área de S está dada por la fórmula

$$\int_A \sec(\alpha)\ dx\ dy$$

donde α es el ángulo entre el vector $(0, 0, 1)$ y el vector unitario N normal a S (en cada punto de S) cuya tercera componente siempre es positiva.
(b) Pruebe que si S esta contenida en un plano P, entonces

$$\acute{a}rea\ (S) = \sec(\alpha) \cdot \acute{a}rea\ (A)$$

donde α es el ángulo entre el vector $(0, 0, 1)$ y el vector unitario N (normal a P cuya tercera componente siempre es positiva).
8.-Usando el ejercicio anterior calcule el área de las siguientes superficies
(a) El triángulo cuyos vértices son $(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1)$
(b) La porción del plano $x + y + z = a$ que queda dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$