Tarea 9 fecha de entrega 5 de mayo 2017

Teorema de la Divergencia

1.-Dado el campo vectorial $F = (x, y, z)$ verificar que

$$\int\int_S F \cdot N \ ds = 3V$$

donde V es el volumen del sólido limitado o acotado por la superficie cerrada S.

2.-Dado el campo vectorial $F = (x, y, z)$ verificar que

$$\frac{1}{\|F\|}\int\int_S F \cdot N \ ds = \frac{3}{\|F\|}\int\int\int_W dv$$

3.-Demostrar que

$$(a) \quad \int\int\int_W \left(f \ \nabla^2 g + \nabla \ f \cdot \nabla \ g\right) + dV = \int\int_S f \ \nabla \ g \cdot \ N \ ds$$

donde $\nabla^2 g = \nabla \cdot \ \nabla \ g$ y como hint $div\ (fF) = f\ div\ F + \nabla\ f \cdot\ F$

$$(b) \quad \int\int\int_W \left(f \ \nabla^2 g + g \ \nabla^2 f\right) \ dV = \int\int_S (f \ \nabla \ g \cdot \ N - g \ \nabla \ f \cdot \ N) \ ds$$

4.-Sea S la superficie frontera de una región W en $\mathbb{R}^3$ y sea $D_{e_n}\varphi$ la derivada direccional de φ, donde e_n es el vector normal unitario que apunta hacia el exterior.
Use el teorema de la divergencia para demostrar que

$$(a) \quad \int\int_S D_{e_n}\varphi \ ds = \int\int\int_W \Delta\varphi \ dV$$

donde

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

(b) Prueba que si $\Delta\varphi = 0$, entonces

$$\int\int_S D_{e_n}\varphi \ ds = 0$$

5.-Suponga que si $\Delta\varphi = 0$. Pruebe que $div\ (\varphi\nabla\ \varphi) = \|\nabla\ \varphi\|^2$ y concluya que:

$$\int\int_S \varphi \ D_{e_n}\varphi \ ds = \int\int\int_W \|\nabla\varphi\|^2 \ dV$$

Teorema de Stokes

6.-Suponga que f y g tienen derivadas parciales continuas de orden 2 continuas. Demuestre que

$$(a) \ \oint_{Fr(S)} f \ \nabla \ g \cdot ds = \int\int_S (\nabla \ f \times \nabla \ g) \ \cdot \ N \ ds$$

$$(b) \ \oint_{Fr(S)} f \ \nabla \ f \cdot ds = 0$$

$$(c)\ \oint_{Fr(S)} (\ f\ \nabla\ g + g\ \nabla\ f\ ) \cdot ds = 0$$

7.-Compruebe las identidades anteriores para $f(x,y,z) = xyz$ y $g(x,y,z) = z$. Sea S el hemisferio

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

8.-Dar una demostración del Teorema de Stokes para superficies parametrizadas

$$\phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$