Propiedad Arquimediana

Definición 1. *En un campo ordenado F, decimos que F es arquimediano si satisface*

$$\forall\, x \in F,\ \exists\, n \in \mathbb{N}\ \ tal\ \ que\ \ n > x$$

Teorema 1. ***(Propiedad 1)****. En un campo ordenado arquimediano se cumple*

$$Si\ a \in F,\ a > 0\ \ entonces\ \ \forall\, x \in F,\ \ \exists\, n \in \mathbb{N}\ \ tal\ \ que\ \ na > x$$

Demostración. Supongamos que F satisface la propiedad arquimediana y $a > 0$. Entonces $\forall\ x \in F$ se tiene que $\dfrac{x}{a} \in F$ y por la propiedad arquimediana

$$\exists\, n \in \mathbb{N}\ \ tal\ \ que\ \ n > \frac{x}{a}\ y\ como\ \ a > 0,\ \ na > x$$

□

Observación El resultado anterior demuestra que

$$Propiedad\ arquimediana\ \Rightarrow\ Propiedad\ 1$$

Teorema 2. ***(Propiedad 2)****. En un campo ordenado arquimediano se cumple*

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, n \in \mathbb{N}\ \ tal\ \ que\ \ \frac{1}{n} < \epsilon$$

Demostración. Sabemos que un campo ordenado arquimediano cumple la **propiedad 1**

$$Si\ \ a > 0\ \ entonces\ \ \forall\, x \in F,\ \ \exists\, n \in \mathbb{N}\ \ tal\ \ que\ \ na > x$$

Ahora bien sea $\epsilon > 0\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{\epsilon} > 0$ tomando $x = \dfrac{1}{\epsilon}$ y tomando $a = 1$ en la´**propiedad 1** se tiene

$$\exists\ \ n \in \mathbb{N}\ \ tal\ \ que\ \ n = n \cdot 1 > x = \frac{1}{\epsilon}\ \ \Rightarrow\ \ \epsilon > \frac{1}{n}$$

□

Observación Los resultados anteriores demuestran que

$$Propiedad\ arquimediana\ \Rightarrow\ Propiedad\ 1\ \Rightarrow\ Propiedad\ 2$$

Teorema 3. ***(Propiedad 3)****. En un campo ordenado arquimediano se cumple*

$$\forall\, x > 0\ \ \exists\, n \in \mathbb{N}\ \ tal\ \ que\ \ n > x$$

Demostración. Dado que en un campo ordenado arquimediano se cumplen la propiedad 1 y 2, tenemos que

$$\forall\, x \in F, \quad x \neq 0, \quad se \;\; cumple \;\; x > 0 \;\; ó \;\; x < 0$$

Caso $x > 0$
En este caso por hipotesis

$$\forall\, x > 0 \;\; \exists\, n \in \mathbb{N} \;\; tal \;\; que \;\; n > x$$

Caso $x < 0$
En este caso se tiene $-x > 0$ y por hipotesis

$$\forall\; -x > 0 \;\; \exists\, n \in \mathbb{N} \;\; tal \;\; que \;\; n > -x \;\Rightarrow\; n > -x > x \;\Rightarrow\; n > x$$

En el caso de $x = 0$ sabemos que $1 > 0$ por lo tanto $\exists\, n \in \mathbb{N} \;\; tal \;\; que \;\; n > x$ por lo tanto $\forall\, x \in F, \;\; \exists\, n \in \mathbb{N} \;\; tal \;\; que \;\; n > x$ □

Observación Los resultados anteriores demuestran que

$$Propiedad\ arquimediana \;\Rightarrow\; Propiedad\ 1 \;\Rightarrow\; Propiedad\ 2 \;\Rightarrow\; Propiedad\ 3$$

Teorema 4. *. Sea F un campo ordenado. Supongamos que se cumple*

$$\forall\, \epsilon > 0, \; \exists\, n \in \mathbb{N} \;\; tal \;\; que \;\; \frac{1}{n} < \epsilon$$

entonces el campo es arquimediano

Demostración. Supongamos que se cumple

$$\forall\, \epsilon > 0, \; \exists\, n \in \mathbb{N} \;\; tal \;\; que \;\; \frac{1}{n} < \epsilon$$

si $\epsilon > 0$ entonces $\epsilon^{-1} > 0$ y podemos tomar $x = \epsilon^{-1}$
por lo tanto según (c)

$$\exists \;\; n \in \mathbb{N} \;\; tal \;\; que \;\; \frac{1}{n} < \epsilon \;\Rightarrow\; \frac{1}{\epsilon} < n \;\Rightarrow\; x < n$$

por lo tanto

$$\forall\, x > 0, \;\; \exists \;\; n \in \mathbb{N} \;\; tal \;\; que \;\; n > x$$

□

Observación Los resultados anteriores demuestran que

$$Propiedad\, arquimediana \;\Rightarrow\; Propiedad\, 1 \;\Rightarrow\; Propiedad\, 2 \;\Rightarrow\; Propiedad\, 3 \;\Rightarrow\; Propiedad\, arquimediana$$

es decir las propiedades son equivalentes.

Teorema 5. *Para todo elemento positivo x de un campo ordenado F arquimediano existen números enteros consecutivos tal que*

$$n-1 \leq x < n$$

Demostración. Existencia Sea F un campo ordenado arquimediano y sea $x > 0$ por la propiedad arquimediana el conjunto

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid x < n\} \neq \emptyset$$

y por el principio del buen orden S tiene un primer elemento.
Sea n_0 tal elemento entonces $x < n_0$ y $n_0 - 1 \notin S$ por lo tanto $x \not< n_0$
por lo tanto $n_0 - 1 \leq x$ y en consecuencia $n_0 - 1 \leq x < n_0$
Unicidad
Supongamos que existen $n, m \in \mathbb{N}$ tal que

$$n-1 \leq x < n \quad y \quad m-1 \leq x < m$$

de la primera expresión tenemos $x < n \leq x+1$ y de la segunda expresión tenemos $-x-1 \leq -m < -x$ y sumando ambas desigualdades

$$-1 < n-m < 1$$

al ser cero el único entero entre -1,1 se tiene que

$$n-m=0 \;\Rightarrow\; n=m$$

□