Conjuntos Arquimedianos

Teorema 1. *Para todo elemento positivo x de un campo ordenado F arquimediano existen números enteros consecutivos tal que*

$$n-1 \leq x < n$$

Demostración. Existencia Sea F un campo ordenado arquimediano y sea $x > 0$ por la propiedad arquimediana el conjunto

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid x < n\} \neq \emptyset$$

y por el principio del buen orden S tiene un primer elemento.
Sea n_0 tal elemento entonces $x < n_0$ y $n_0 - 1 \notin S$ por lo tanto $x \not< n_0$
por lo tanto $n_0 - 1 \leq x$ y en consecuencia $n_0 - 1 \leq x < n_0$
Unicidad
Supongamos que existen $n, m \in \mathbb{N}$ tal que

$$n-1 \leq x < n \quad y \quad m-1 \leq x < m$$

de la primera expresión tenemos $x < n \leq x+1$ y de la segunda expresión tenemos $-x-1 \leq -m < -x$ y sumando ambas desigualdades

$$-1 < n-m < 1$$

al ser cero el único entero entre -1,1 se tiene que

$$n-m=0 \;\Rightarrow\; n=m$$

□

Corolario 1. *Todo elemento de un campo ordenado arquimediano se encuentre entre un par de enteros consecutivos, esto es*

$$\forall\, x \in F, \;\; \exists \; un \; unico \; n \in \mathbb{Z} \;\; tal \;\; que \;\; n-1 \leq x < n$$

Demostración. Según el resultado anterior si $x \in F$ es tal que $x > 0$ entonces

$$\exists \; un \; unico \; n \in \mathbb{Z} \;\; tal \;\; que \;\; n-1 \leq x < n$$

si $x \in F$ es tal que $x < 0$ entonces $-x > 0$ y se tiene

$$\exists \; un \; unico \; n \in \mathbb{Z} \;\; tal \;\; que \;\; n-1 \leq -x < n \;\Rightarrow\; -n < x \leq n-1$$

□

Corolario 2. *Sean $x, y \in F$, donde F es un campo ordenado arquimediano tal que $y - x > 1$ se tiene entonces que*

$$\exists\, n \in \mathbb{Z} \quad tal \quad que \quad x < n < y$$

Demostración. Supongamos que F es un campo ordenado arquimediano, si $x, y \in F$ entonces existe un entero n tal que

$$n - 1 \leq x < n$$

si sumamos 1 a la desigualdad anterior

$$n \leq x + 1 < n + 1$$

por hipótesis

$$y - x > 1 \;\Rightarrow\; y > x + 1$$

de las desigualdades anteriores tenemos

$$x < n \leq x + 1 < y$$

por lo tanto existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x < n < y$ □

Ejercicio Si $x \notin \mathbb{Q}$ y $y \notin \mathbb{Q}$ ¿Puede ser $x + y \notin \mathbb{Q}$

solución Si consideramos $x = \sqrt{2}$ y $y = -\sqrt{2}$ se tiene

$$x + y = \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in \mathbb{Q}$$

por lo tanto no podría ocurrir siempre que $x + y \notin Q$

Ejercicio Si $x \notin \mathbb{Q}$ y $y \notin \mathbb{Q}$ ¿Puede ser $x \cdot y \notin \mathbb{Q}$

solución Si consideramos $x = \sqrt{2}$ y $y = \sqrt{2}$ se tiene

$$x \cdot y = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$$

por lo tanto no podría ocurrir siempre que $x \cdot y \notin Q$

Ejercicio Dados $x, y \in F$ con $x \in \mathbb{Q}$ y $y \notin \mathbb{Q}$ demuestre que $x + y \notin \mathbb{Q}$

Solución Supongamos que x es un número racional y y es un número irracional y sea $z = x + y$. Entonces

$$y = z - x$$

si z es un racional entonces por la cerradura de los números racionales z-x sería un racional y por tanto y es un número racional (contradicción)

Ejercicio Si $x \neq 0$ es un número racional y y es un número irracional, entonces xy es un número irracional

Solución Supongamos que $x \neq 0$ entonces $x^{-1} \neq 0$. Si $z = xy$ entonces $\dfrac{z}{x} = y$, si z es racional entonces $z \cdot x^{-1}$ sería un racional y por tanto y sería un racional (Contradicción)

Ejercicio Demuestre que si x es un número irracional entonces $-x,\; x^{-1}$ son números irracionales

Solución Tenemos que

a) Si suponemos que $-x$ es un número racional entonces según los ejercicios anteriores

$$0 = x + (-x) \notin \mathbb{Q} \quad (Contradicción)$$

b) Sabemos que $\forall x \in F \; x \cdot x^{-1} = 1$, si x^{-1} es racional entonces $x \cdot x^{-1}$ sería irracional y en consecuencia 1 sería irracional (Contradicción)

Conjuntos Densos

Definición 1. *Se dice que un subconjunto S de un campo ordenado F es denso si:*

$$\forall \; a, b \in \; F, \;\; \exists \; x \in \; S \quad tal \quad que \quad a < x < b$$

Teorema 2. *(Densidad de los Números Racionales $\mathbb{Q}$ en F) Los números racionales forman un subconjunto denso en un campo ordenado arquimediano F*

Demostración. Suponga que F es un campo ordenado arquimediano y dados $a, b \in F$ con $a < b$ se tiene que
(a) $b - a > 0$
(b) $\exists \; n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < b - a \;\Rightarrow\; 1 < (b-a)n \;\Rightarrow\; 1 < bn - an$$

segíun el resultado anterior $\exists \; m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$na < m < nb \;\Rightarrow\; a < \frac{m}{n} < b$$

por lo tanto los números racionales forman un subconjunto denso en un campo ordenado F □

Teorema 3. *En un campo ordenado arquimediano, los números irracionales forman un subconjunto denso de F*

Demostración. Sean $x, y \in F$ tal que $x < y$ aplicando los reultados antariores tenemos que existen racionales $r, s \in F$ tales que

$$x < r < s < y$$

si por otro lado consideremos el número

$$r + \frac{s-r}{\sqrt{2}}$$

se tiene entonces que este número es irracional por ser el producto y la suma de un número racional con un número irracional
También

$$r < r + \frac{s-r}{\sqrt{2}}$$

y como

$$\frac{s-r}{\sqrt{2}} < s - r \;\Rightarrow\; r + \frac{s-r}{\sqrt{2}} < s$$

por lo tanto dados $x, y \in F$ existe un número irracional z, tal que $x < z < y$ □

Teorema 4. *Si S es un subconjunto denso de un campo ordenado F, entonces entre cualesquiera dos elementos de F existe una infinidad de elementos de S.*

Demostración. Sean $a, b \in F$ tal que $a < b$ al ser S denso se tiene que existe $x \in S$ tal que

$$a < x < b$$

si $x \in S$ entonces $x \in F$ y podemos aplicar lo anterior de tal manera que existe $x_1 \in S$ tal que

$$a < x_1 < x < b$$

si $x_1 \in S$ entonces $x_1 \in F$ y podemos aplicar lo anterior de tal manera que existe $x_2 \in S$ tal que

$$a < x_2 < x_1 < x < b$$

continuamos este proceso tantas veces como queramos.
De esta manera encontraremos una infinidad de elementos de S entre a y b $\square$