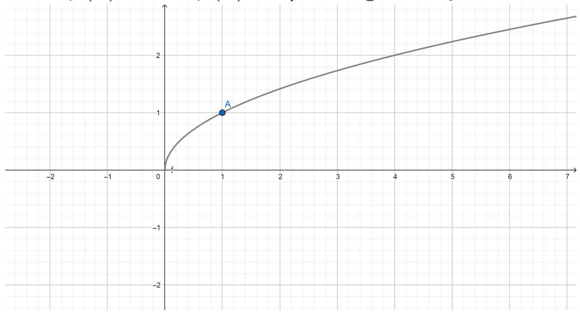
Veamos algunos ejemplos de gráficas de funciones con exponente racional:
Recordemos unas gráficas importantes:

Sea $f : \mathbb{R}^{+} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$.
Podemos ver a $f(x)$ como $f(x) = \sqrt{x}$, la gráfica ya la habíamos trabajado anteriormente la cual es:



Veamos algunas variantes de esa función:

**Ejemplo 1:** Graficar $f(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$

Por definición tenemos que $f(x) = 2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$, la cual la podemos ver como producto de dos funciones como sigue:

Sean $g(x) = 2$, la cual tiene como dominio todo los reales y también $h(x) = \sqrt{x}$, la cual su dominio es $\mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$.

Podemos escribir $f = g \cdot h$ y determinar su dominio como $\mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ ya que en la función $h$ , es en la que tenemos "problemas".

Analicemos algunas caracteristicas importantes.

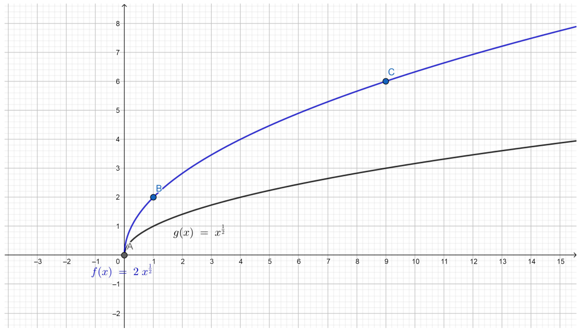
1. Tenemos un productos de funciones las cuales siempre nos darán valores positivos y en el caso de $h$ un valor nulo, entonces podemos afirmar que la función $f$ nos dará puros valores positivos, es decir, $\forall\, x_0 \in Dom f,\ f(x_0) \geqslant 0$.

2. La función $h$ es una función creciente, al contrario de $g$ que se mantiene constante, por lo que podemos afirmar que $f$ es una función creciente.
   Afirmación: $f$ es creciente.
   Dem:
   Sean $x_1$ y $x_2 \in Dom f$, tales que $x_1 < x_2$,
   pd. $f(x_1) < f(x_2)$.
   Entonces, como $h$ es creciente tenemos $h(x_1) < h(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$, si multiplicamos por la constate 2 la desigualdad, tenemos $2 \cdot \sqrt{x_1} < 2 \cdot \sqrt{x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $\square$

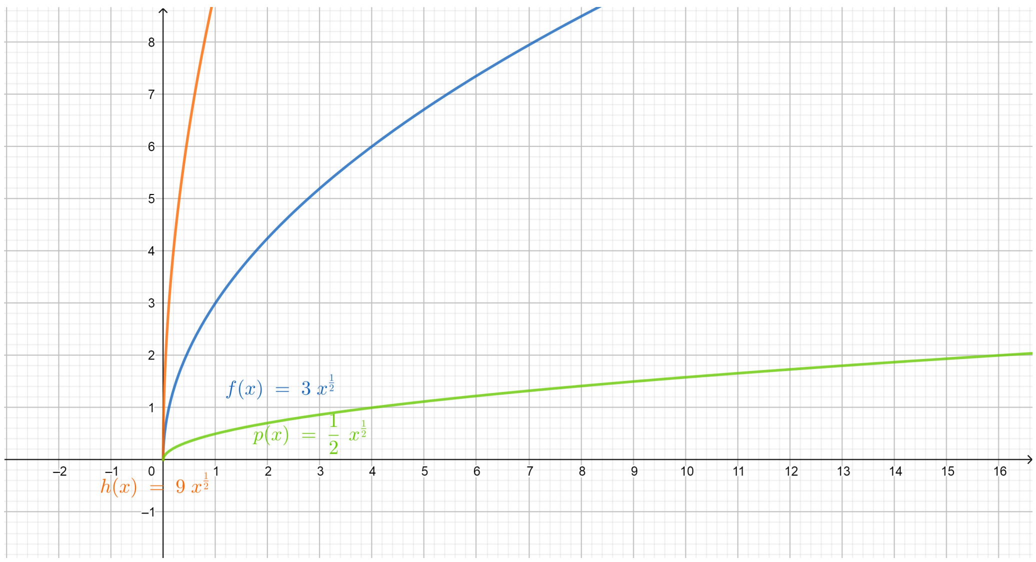
3. Tomemos algunos valores especificos como 0, 1, 9, y evaluemos la función:

- $f(0) = 2\sqrt{0} = 2 \cdot 0 = 0$, la función para por el punto $A = (0, 0)$.
- $f(1) = 2\sqrt{1} = 2 \cdot 1 = 2$, la función pasa por el punto $B = (1, 2)$.
- $f(9) = 2\sqrt{3} = 2 \cdot 3 = 6$, la función pasa por el punto $C = (9, 6)$.

Con lo que podemos decir que la gráfica tiene la siguiente forma:



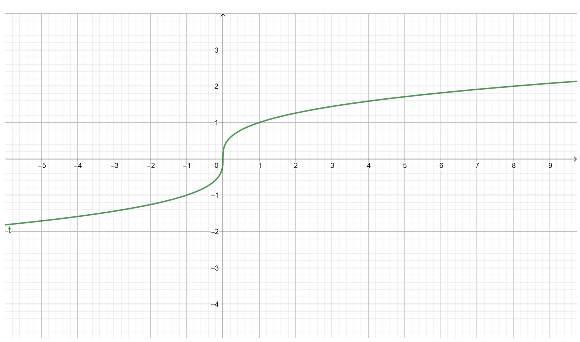

Si tomamos una función en general como $F(x) = C \cdot x^{\frac{1}{2}}$, $con\, C > 0$ el comportamiento de la función va a ser el mismo que $f$ en cuanto a los puntos 1 y 2 analizados anteriormente, lo cual nos dará gráficas de la siguiente forma:




¿Qué pasa con $C < 0$? **(JUSTIFICALO)**

Otra gráfica que vamos a recordar es la siguiente:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, la cual tiene como gráfica:



Utilizándola, grafiqueos la siguiente función:

**Ejemplo 2:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$.

Por deficinión tenemos que $f(x) = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2} = y$, en donde $y \in \mathbb{R}$ es de la forma $y^3 = x^2$.

Gracias a esa definición podemos ver a $f$ como la composición de dos funciones, de la siguiente manera:

Tomamos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = x^2$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $h(x) = \sqrt[3]{x}$, y reescribimos a $f$ como la composición de $g$ y $h$, de forma que $f = h \circ g$.

**Observaciónes:**

1. $Domf = Domg = \mathbb{R}$

2. $f$ es par (Esto se deduce gracias a que $g$ es par). **Lo que nos dice que basta con graficar la parte positiva del eje $X$ y reflejar sobre el eje $Y$.**

3. $f$ es decreciente en el intervalo $[-\infty, 0)$ y creciente en e intervalo $(0, \infty]$.
   Demostración:
   a) pd. $f$ es decreciente.
   Sean $x_1, x_2 \in Domf$, tales que $x_1 < x_2$.
   pd. $f(x_1) > f(x_2)$.
   Tomamos $x_1 < x_2$ y le aplicamos $g$, la cual sabemos que es decreciente en el intervalo $[-\infty, 0)$.

$$\Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

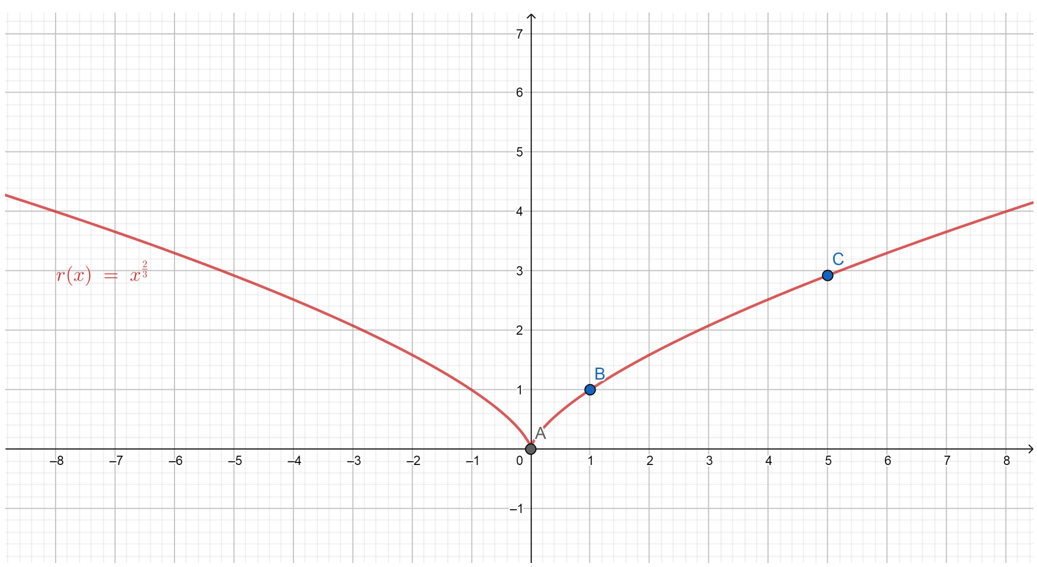
   aplicando $h$ tenemos que $h \circ g(x_1) > h \circ g(x_2)$ puesto que $h$ es creciiente en todo $\mathbb{R}$en particular en el intervalo $[-\infty, 0)$.

$$\therefore f(x_1) = h \circ g(x_1) > h \circ g(x_2) = f(x_2).$$
$$\therefore f(x_1) > f(x_2). \square$$

   b) $f$ es creciente. **(Demuéstralo)**

4. Tomemos algunos puntos de apoyo, tales como 0, 1, 5.
   a) $f(0) = h \circ g(0) = h(g(0)) = h(0^2) = h(0) = \sqrt[3]{0} = 0$, la gráfica pasa por el punto $A = (0, 0)$.
   b)$f(1) = h \circ g(1) = h(g(1)) = h(1^2) = h(1) = \sqrt[3]{1} = 1$, la gráfica pasa por el punto $B = (1, 1)$.
   c) $f(5) = h \circ g(5) = h(g(5)) = h(5^2) = h(25) = \sqrt[3]{25} \approx 2.92$, la gráfica pasa por el punto $C = (5, 2.92)$.

La grafica quedaría de la siguiente forma:



EJERCICIOS:
1.Haz el análisis cuando $C < 0$ de la función $F(x) = C \cdot x^{\frac{1}{2}}$
2.Demuestra las observaciones 2 y 3.$b$ del ejemplo cuando $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ **(Ejemplo 2)**.
3. Gráfica la función: $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}$ y establece su dominio.