Números Naturales $\mathbb{N}$

Definición 1. *Dado un campo ordenado F, y un subconjunto $A \subset F$ se dice A es inductivo cuando verifica las dos condiciones siguientes:*
a) $1 \in A$
b) $\forall x \in F,\ x \in A \Rightarrow x+1 \in A$

Teorema 1. *Si $\mathcal{C}$ es una colección de subconjuntos inductivos de F, entonces $\bigcap \mathcal{C}$ es un conjunto inductivo*

Demostración. (i) Tenemos que $\forall c \in \mathcal{C}$ se tiene que $1 \in c$ pues c es inductivo por lo tanto

$$1 \in \bigcap \mathcal{C}$$

(ii) Supongamos que $x \in \bigcap \mathcal{C}$. Sea $c \in \mathcal{C}$ entonces $x \in\ c$ como c es inductivo $x+1 \in c$ por lo tanto es cierto que

$$\forall\ c \in \mathcal{C}, \quad x+1 \in \bigcap \mathcal{C}$$

□

Definición 2. *El conjunto de números naturales de un campo ordenado F es la intersección de todos los subconjuntos inductivos de F*

$$\mathbb{N} = \bigcap \mathcal{C}$$

donde $\mathcal{C}$ denota la colección de todos los subconjuntos inductivos de F, y a los elementos de $\mathbb{N}$ los llamamos números naturales
Obs. Los números naturales no satisfacen todas las propiedades que definen un campo, pero tienen propiedades que se estudiaran.

Teorema 2. *El conjunto de números naturales es el más pequeño subconjunto inductivo de un campo F, en el sentido de que $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo y para todo subconjunto inductivo $A \subset F$ se tiene $\mathbb{N} \subset A$*

Demostración. Según el teorema anterior $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo, ahora tomamos un C $\in\ S$ donde S representa una colección de todos los subconjuntos inductivos de F. Se tiene entonces que $\bigcap S \subset \mathcal{C}$ por lo tanto $\mathbb{N} \subset \mathcal{C}$ □

Teorema 3. *Tenemos que*

a) Todos los números naturales de un campo F son positivos

b) El número 1 es el más pequeño de los números naturales

c) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, *si* $n > 1$, *entonces* $n-1 \in \mathbb{N}$

Demostración. En este caso

a) Definimos el conjunto

$$A = \{x \in F \mid x > 0\}$$

se tiene entonces que $1 \in A$ pues $1 > 0$. Y para $x \in A$ se tiene que

$$x > 0 \ \Rightarrow\ x+1 > 0$$

por tanto $x \in A \ \Rightarrow\ x+1 \in A$. De esta manera el conjunto A es un conjunto inductivo y por lo tanto $\mathbb{N} \subset A$

b) Definimos el conjunto

$$A = \{x \in F \mid x \geq 1\}$$

se tiene entonces que

$$1 \geq 1 \;\Rightarrow\; 1 \in A$$

Suponemos que $x \in A$. Entonces $x \geq 1$ y por tanto $x+1 \geq 1+1 > 1$ es decir $x+1 \geq 1$ por lo tanto $x+1 \in A$. Concluimos entonces que

$$x \in A \;\Rightarrow\; x+1 \in A$$

$\therefore$ A es un conjunto inductivo y como $\mathbb{N} \subset A$ entonces $\forall\ n \in \mathbb{N}\ n \geq 1$

c) Definimos el conjunto

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 1 \;\Rightarrow\; n-1 \in \mathbb{N}\}$$

se tiene entonces que

$$1 \in A, \quad pues\ 1 \not> 1$$

Suponemos que $x \in A$. Entonces $x > 1$ y por tanto $x-1 > 1 \in \mathbb{N}$. Consideramos $x+1$ tenemos entonces

$$x \in \mathbb{N},\ x \geq 1,\ x+1 > 1\ y\ (x+1)-1 = x \in \mathbb{N}$$

por lo que

$$x+1 > 1 \;\Rightarrow\; (x+1)-1 = x \in \mathbb{N}$$

Por tanto $x+1 \in A$ y A es un conjunto inductivo, de manera que, $\mathbb{N} \in A$. Esto es

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > 1 \;\Rightarrow\; n-1 \in \mathbb{N}$$

$\square$

Teorema 4. *Principio de Inducción Matemática Dada una proposición P. Se tiene que P es válida* $\forall\ \ n \in \mathbb{N}$ *si:*

a) p(1) es verdadera

b) $\forall\ k \in \mathbb{N}, \quad p(k) \;\Rightarrow\; p(k+1)$

entonces $\forall n \in \mathbb{N},\ p(n)$ *es verdadera*

Demostración. Suponga que se tiene una proposición P que satisface (1), (2). Sea

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid p(x)\ \ es\ \ verdadera\}$$

(i) $1 \in A$ por (1)
(ii) Suponemos que $x \in A$. Entonces $x \in \mathbb{N}$ y $p(x)$ es verdadera, por (2) $p(x+1)$ es verdadera. Esto es $x+1 \in A$. Por lo tanto se ha probado que

$$x \in A \;\Rightarrow\; x+1 \in A$$

entonces A es un conjunto inductivo $\therefore \mathbb{N} \subset A$. Esto es $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ es verdadera $\square$

Teorema 5. *Sea F un campo ordenado*

a) $\forall\ m, n \in \mathbb{N}$, *si* $m < n$, *entonces* $n - m \in \mathbb{N}$

b) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, *se tiene* $\nexists\ m \in \mathbb{N}$, *tal que* $n < m < n + 1$

Demostración. Tenemos que

a) $\forall\ n \in \mathbb{N}$ sea $p(n)$ la proposición

$$p(n):\ \forall\ m \in \mathbb{N},\ m < n\ \Rightarrow\ m - n \in \mathbb{N}$$

Se tiene entonces

a) p(1) es verdadera, pues $\nexists\ m \in \mathbb{N}$ tal que $m < 1$

b) Supongamos que $p(k)$ es verdadera. Esto es $m < k \ \Rightarrow\ k - m \in \mathbb{N}$. Para probar $p(k+1)$, supongamos $m < k+1$. Entonces $m - 1 < k$ y según (2) $k - (m-1) \in \mathbb{N}$. Esto es, $(k+1) - m \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces

$$m < (k+1)\ \Rightarrow\ (k+1) - m \in \mathbb{N}$$

Esto es, $p(k+1)$ es verdadero. Así hemos probado que $p(k)\ \Rightarrow\ p(k+1)$. Por lo tanto por el principio de inducción matemática, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ es verdadera.

b) Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos, por contradicción, que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n < m < n + 1$. Sustraemos entonces n de ambos miembros de la desigualdad y tenemos que

$$0 < m - n < 1$$

por (a) $m - n \in \mathbb{N}$. Pero tenemos una contradicción pues $\nexists\ m \in \mathbb{N}$ tal que $n < m < n + 1$

□

Teorema 6. *En algún campo ordenado F*
(a) $\mathbb{N}$ *es cerrado bajo la suma*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ un elemento fijo, $\forall\ m \in \mathbb{N}$ sea $p(m)$ la propiedad

$$p(n):\ n + m \in \mathbb{N}$$

Tenemos entonces que
(1) Si $n \in \mathbb{N}$ entonces al ser $\mathbb{N}$ inductivo se cumple $(n+1) \in \mathbb{N}$ por lo tanto $p(1)$ es verdadera
(2) Supongamos que $p(k)$ es verdadera, esto quiere decir que $(n+k) \in \mathbb{N}$ y al ser $\mathbb{N}$ inductivo se cumple $(n+k)+1 \in \mathbb{N}$ esto es
$p(k+1)$ es verdadera. Por lo tanto $p(k)\ \Rightarrow\ p(k+1)$ y por el principio de inducción matemática $\forall\ m \in \mathbb{N}$ $p(m)$ es verdadera por lo tanto $\forall\ n, m \in \mathbb{N}$ se tiene $(n+m) \in \mathbb{N}$ □

Teorema 7. *En algún campo ordenado F,* $\mathbb{N}$ *es cerrado bajo la multiplicación*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ un elemento fijo, $\forall\ m \in \mathbb{N}$ sea $p(m)$ la propiedad

$$p(m) : n \cdot m \in \mathbb{N}$$

Tenemos entonces que
(1) Si $n \in \mathbb{N}$ entonces al ser $n = n \cdot 1 \in \mathbb{N}$ se tiene $p(1)$ es verdadera
(2) Supongamos que $p(k)$ es verdadera, esto quiere decir que $(nk) \in \mathbb{N}$ y si $n \in \mathbb{N}$ se cumple $(nk) + n \in \mathbb{N}$ esto es
$n(k+1) \in \mathbb{N}$ por tanto $p(k+1)$ es verdadera. Por lo tanto $p(k) \Rightarrow p(k+1)$ y por el principio de inducción matemática $\forall\ m \in \mathbb{N}$ $p(m)$ es verdadera por lo tanto $\forall\ n, m \in \mathbb{N}$ se tiene $(nm) \in \mathbb{N}$ $\square$

Teorema 8. *En algun campo ordenado F*
(a) Los números naturales no son cerrados bajo sustracción y división

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ un elemento fijo y $\forall\ m \in \mathbb{N}$ definimos la propiedad $n - m \in \mathbb{N}$.
Tenemos que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ se cumple solo una de las siguientes:

$$n < m, \quad n = m, \quad n > m$$

para el $n = 1$ y $m = 1$ se tiene $1 - 1 \in \mathbb{N}$ lo cual no ocurre.
En el caso $n < m$ se tendría $n - m \in \mathbb{N}$ lo cual no ocurre.
Y en el caso de la división se tiene

$$1 \div 2 = 1 \cdot 2^{-1} \notin \mathbb{N}$$

pues en $\mathbb{N}$ no hay inversos multiplicativos. $\square$