Teorema 1. *Principio de Inducción Matemática Sea F un campo ordenado. Supongamos que $\forall \ n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ es una proposición acerca de n. Si*

1. *p(1) es verdadera y*
2. $\forall \ k \in \mathbb{N}, \quad p(k) \ \Rightarrow \ p(k+1)$

entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ es verdadera

Demostración. Suponga que se tiene una proposición P que satisface (1), (2). Sea

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid p(x) \ \ es \ \ verdadera\}$$

(i) $1 \in A$ por (1)
(ii) Suponemos que $x \in A$. Entonces $x \in \mathbb{N}$ y $p(x)$ es verdadera, por (2) $p(x+1)$ es verdadera. Esto es $x+1 \in A$. Por lo tanto se ha probado que

$$x \in A \ \Rightarrow \ x+1 \in A$$

entonces A es un conjunto inductivo $\therefore \mathbb{N} \subset A$. Esto es $\forall n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ es verdadera □

Definición 1. *Definimos a^n, $\forall \ n \in \mathbb{N}$ como:*
(1) $a^1 = a$
(2) $\forall \ k \in \mathbb{N}, \quad a^{k+1} = a^k a$

Teorema 2. *Fijando $n \in \mathbb{N}$ y $\forall \ m \in \mathbb{N}$, consideramos la proposición*

$$p(m): \ a^m a^n = a^{m+n}$$

Demostración. Procediendo por inducción sobre m y fijando $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

1. $p(1): \ a^1 a^n = a \cdot a^n = a^{n+1} \ \Rightarrow \ p(1) \ \ es \ \ verdadera$
2. Suponemos para $k \in \mathbb{N}$ que $p(k)$ es verdadera esto es:

   $$a^k a^n = a^{k+n}$$

   a partir de esto se tiene que

   $$a^k a^n = a^{n+k} \ \Rightarrow \ a^k a^n a = a^{k+n} a \ \Rightarrow \ a^k a^{n+1} = a^{n+k+1} = a^{k+1+n}$$

   por lo tanto $p(k) \ \Rightarrow \ p(k+1)$ por lo tanto $p(n)$ es verdadera $\forall \ n \in \mathbb{N}$

□

Teorema 3. $\forall\ n, m \in \mathbb{N}\ a^n b^n = (ab)^n$

Demostración. Procediendo por inducción sobre m y fijando $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$(1) \quad a^1 b^1 = ab = (ab)^1 \ \Rightarrow\ p(1) \ \ es \ \ verdadera$$

Suponemos para $k \in \mathbb{N}$ que $p(k)$ es verdadera esto es:

$$a^k b^k = (ab)^k$$

a partir de esto se tiene que

$$a^k b^k = (ab)^k \ \Rightarrow\ a^k b^k ab = (ab)^k ab \ \Rightarrow\ a^k a b^k b = (ab)^{k+1} \ \Rightarrow\ a^{k+1} b^{k+1} = (ab)^{k+1}$$

por lo tanto $p(k) \ \Rightarrow\ p(k+1)$ por lo tanto $p(n)$ es verdadera $\forall\ n \in \mathbb{N}$ □

Teorema 4. *Fijando $n \in \mathbb{N}$ y $\forall\ m \in \mathbb{N}$, consideramos la proposición*

$$p(m): \ \ (a^m)^n = a^{mn}$$

Demostración. Procediendo por inducción sobre m y fijando $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

1. $p(1): \ \ (a^1)^n = a^n = a^{1 \cdot n} \ \Rightarrow\ p(1) \ \ es \ \ verdadera$
2. Suponemos para $k \in \mathbb{N}$ que $p(k)$ es verdadera esto es:

   $$(a^k)^n = a^{k \cdot n}$$

   a partir de esto se tiene que

   $$(a^{(k+1)})^n = (a^k a)^n = (a^k)^n a^n = (a^{kn}) a^n = a^{k \cdot n + n} = a^{n \cdot (k+1)} = a^{(k+1) \cdot n}$$

   por lo tanto $p(k) \ \Rightarrow\ p(k+1)$ por lo tanto $p(n)$ es verdadera $\forall\ n \in \mathbb{N}$

□

Teorema 5. *Principio Alterno de Inducción Matemática Suponga que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ es una proposición verdadera acerca de n tal que*

1. *$p(1)$ es verdadera*
2. *$\forall\ k \in \mathbb{N}$, si $p(m)$ es cierta para todo natural $m < k$ en $\mathbb{N}$ entonces $p(k)$ es verdadera.*
   Por lo tanto $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ es verdadera

Demostración. Supongamos que $p(n)$ satisface las condiciones (1) y (2). Denotemos por $q(1)$ a $p(1)$, y para $k \geq 2$ sea $q(k)$ la que denota $p(m)$ es cierta para todo natural $m < k$. Entonces,

$$\begin{aligned}
&(i)\ q(1)\ es\ verdadero \\
&(ii)\ \forall\ k \in \mathbb{N},\ q(k) \ \Rightarrow\ p(m)\ es\ cierto\ \forall\ m < k \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow\ p(k)\ es\ cierta\ por\ (2) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow\ p(k)\ es\ cierta\ \forall\ m < k+1 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow\ q(k+1)
\end{aligned}$$

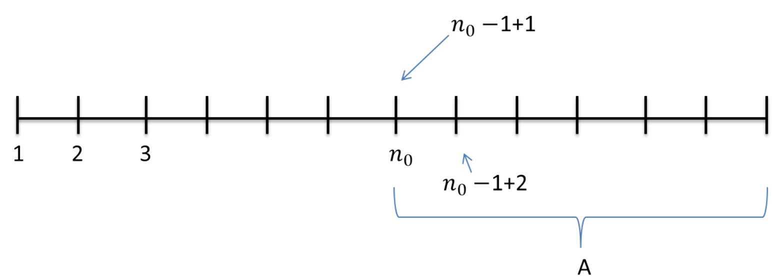
Por lo tanto por el principio de inducción, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $q(n)$ es verdadera, se sigue entonces que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ es verdadera. □

Teorema 6. *Principio del Buen Orden Sea A un subconjunto no vacío de números naturales, entonces A tiene un elemento mínimo.*

Demostración. Supongamos que A no tiene un elemento mínimo. Sea $B = \mathbb{N} - A$. tenemos entonces
(1) $1 \in B$ pues si $1 \in A$, A tendría un elemento mínimo.
(2) Si $1, 2, 3, ..., k \notin A$ entonces $k + 1 \notin A$ pues de otra forma $k + 1$ sería el elemento mínimo de A.
Por lo tanto $k + 1 \in B$ y de esta manera B es inductivo y por tanto $\mathbb{N} \subset B$ y en consecuencia $A = \emptyset$ lo cual es una contradicción. □

Teorema 7. *Principio de Inducción Completa Suponga que $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\forall\ n \in \mathbb{N},\quad n \geq n_0$, $p(n)$ es una proposición verdadera acerca de n si:*
(1) $p(n_0)$ es verdadera
(2) $\forall\ k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq n_0$ $p(k) \ \Rightarrow\ p(k + 1)$ entonces $\forall\ n \geq n_0$, $p(n)$ es verdadera

Demostración. Sea A el conjunto de números naturales que contiene a n_0, y contiene a $k+1$ siempre que contiene a k.



Sea B el conjunto de todos números naturales ℓ tales que $n_0 - 1 + \ell$ esta en A. Entonces 1 esta en B y $\ell + 1$ esta en B si ℓ esta en B, de modo que B es inductivo, por lo tanto contiene a todos los números naturales, lo cual significa que A contiene todos los números natruales $\geq n_0$ □

Ejercicio Demuestre usando el pricipio de inducción completa que

$$2^n > 2n + 1 \quad \forall \ \ n \geq 3$$

Solución Dado que $2^3 = 8 > 7 = 2(3) + 1$ entonces $p(3)$ es verdadera.
Supongo ahora $p(k)$ esto es $2^k > 2k + 1$ y tenemos que

$$\left\{\begin{matrix} 2^k > 2k+1 \\ 2^k > 2 \end{matrix}\right\} \ \Rightarrow\ 2^k + 2^k > 2k + 1 + 2 \ \Rightarrow\ 2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$$

esto es $p(k) \ \Rightarrow\ p(k + 1)$ para toda $k \geq 3$