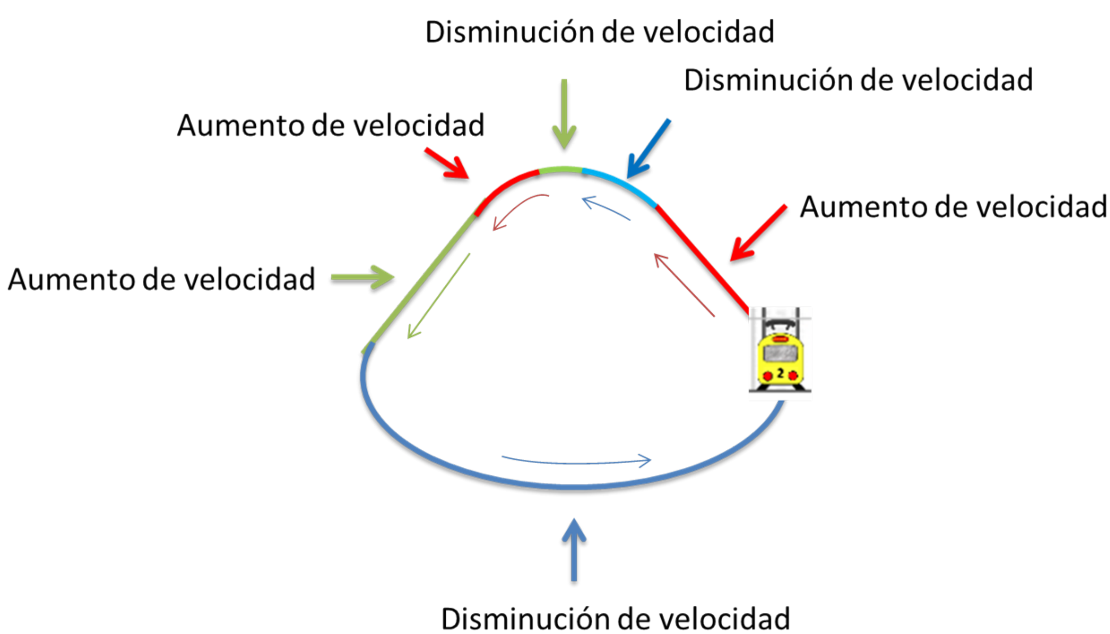
Razón de cambio

Los problemas físicos habitualmente implican la **tasa de cambio** de una cantidad con respecto a otra. Por ejemplo, usted puede contrarrestar la tasa de cambio de distancia con respecto al tiempo, llamada **velocidad**, la tasa de cambio de velocidad con respecto al tiempo, llamada **aceleración**, la tasa de cambio de longitud (de una barra de metal, por ejemplo) con respecto a la temperatura, llamada **coeficiente de expansión lineal**, la tasa de cambio de masa (de un cable de variable sección transversal, digamos) con respecto a la longitud, llamada **densidad lineal**, la tasa de cambio de carga eléctrica con respecto al tiempo, llamado **corriente**, etc. Todos estos son casos especiales del concepto matemático general de la tasa de cambio o derivada de una función con respecto a su argumento.

Problemas relativos a velocidad

Dada la fórmula de la distancia que un cuerpo recorre como función del tiempo, obtener la velocidad y la aceleración en cualquier instante; y, al revés, dada la fórmula que describe la aceleración de un cuerpo como función del tiempo, obtener la velocidad y la distancia recorrida. Este problema surgió directamente en el estudio del movimiento, y la dificultad que planteaba era que las velocidades y las aceleraciones que interesaban en el siglo XVII variaban de instante en instante. Al calcular una velocidad instantanea, por ejemplo, no se puede dividir la distancia recorrida por el tiempo empleado, como ocurre en el caso del cálculo de la velocidad media, porque en un instante dado tanto la distancia recorrida como el el tiempo empleado son cero, y $\frac{0}{0}$ no tiene sentido. Sin embargo, era claro desde un punto de vista físico que los objetos móviles tienen una velocidad en cada instante de su viaje. El problema inverso de obtener la distancia recorrida, conociendo la fórmula de la velocidad, incluye la dificultad correspondiente; no se puede multiplicar la velocidad en cualquier instante de tiempo utilizado para obtener el espacio recorrido, porque la velocidad varía de un instante a otro.



Vamos a investigar un poco como obtener la velocidad de un objeto en movimiento.
Supongamos que se lanza un proyectil verticalmente desde el suelo a una velocidad de 45 m por segundo.

Precindiendo del rozamiento, se supone que solamente actúa la gravedad, por lo que el proyectil se mueve en línea recta. Sea $f(t)$ la altura en metros que alcanza el proyectil t segundos después del lanzamiento. Si la fuerza de gravedad no actuara en él, el proyectil continuaría subiendo a velocidad constante, recorriendo una distancia de 45 metros por segundo, y en el tiempo t se tendría $f(t) = 45t$. Pero a causa de la gravedad, el proyectil va retardándose hasta que su velocidad llega a cero, a a partir de este momento cae al suelo. Experimentos indican que mientras el proyectil está en movimiento su altura $f(t)$ viene dada por la fórmula $f(t) = 45t - 5t^2$, donde el término $-5t^2$ es debido a la influencia de la gravedad. Tenemos que $f(t) = 0 \Leftrightarrow 45t - 5t^2 = \Leftrightarrow t = 0$ ó $t = 9$ o sea que el proyectil regresa a la tierra después de 9 segundos $\therefore t \in [0, 9]$

Problema: Determinar la velocidad del proyectil en cada instante de su movimiento

Para ello necesitamos precisar lo que se entiende por velocidad en cada instante.
Se define la velocidad media en un intervalo de tiempo $t + h, t$ como

$$\frac{Diferencia \quad de \quad distancia \quad en \quad el \qquad intervalo \quad de \quad tiempo}{intervalo \quad de \quad tiempo} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

en nuestro caso tenemos que:

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{45(t+h) - 5(t+h)^2 - (45t - 5t^2)}{h} = \frac{45h - 10th - 5h^2}{h} = 45 - 10t - 5h$$

Cuando h tiende a cero, la expresión tiende a $45 - 10t$. Definimos para este caso la velocidad instantanea en el instante t

$$v(t) = 45 - 10t$$

Ésta fórmula define una nueva función v que indica la rapidez con que se muevwe el proyectil en cada instante de su movimiento.
Este proceso por el cual se obtiene $v(t)$ a partir del cociente se denomina "hallar el limite cuando h tiende a ceroz se representa

$$\boxed{v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}}$$