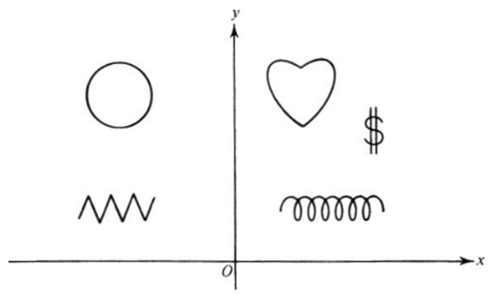
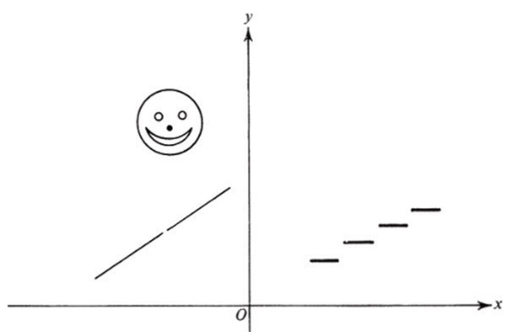
Tangente a una curva

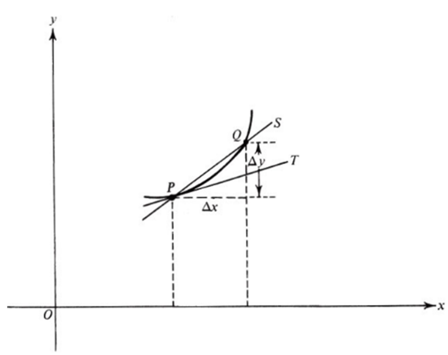
En términos generales, una curva es una figura geométrica que se puede dibujar sin levantar la pluma del papel. Por ejemplo, el círculo, el corazón, el signo de dólar, el el zigzag y la curva que se muestra en la figura son todas curvas



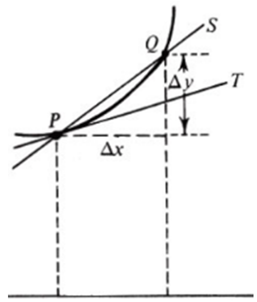
Pero no la cara, la Segmento de línea "perforado"(con un punto perdido) y la escalera que se muestra en la figura.



De estas figuras, solo el zigzag, el segmento de línea perforada y el escalera son gráficos de funciones. De hecho, alguna línea paralela al eje y inter secta cada una de las otras curvas más de una vez.
Sea $P = (x_0, y_0)$ sea un punto fijo y $Q = (x, y)$ un punto variable de una curva $y = f(x)$, y sea S la línea que pasa por los puntos P y Q.



Tal línea se llama una **línea secante** (o simplemente una secante) de la curva y = f (x).
Sea θ la inclinación de S, y suponga $\theta \neq 90$, de modo que S no sea vertical.



La pendiente de S es

$$\tan\ \theta = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

equivalentemente

$$\tan\ \theta = \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

en térmimnos de incrementos

$$\triangle x = x - x_0, \quad \triangle y = y - y_0 = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$$

se dibuja bajo el supuesto de que $\triangle y > 0$. Si $\triangle y < 0$, la inclinación de S se encuentra entre 90° y 180°.
Ahora supongamos que Q se aproxima a P. Mas precisamente, supongamos la distancia

$$|PQ| = \sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}$$

se aproxima a cero.
Entonces la línea secante también varía, girando sobre el punto fijo P. Si la curva $y = f(x)$ se comporta adecuadamente cerca de P, el límite

$$m = \lim_{|PQ| \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

existe (puede ser infinito). La línea T a través de P con pendiente m se llama entonces **línea tangente** (o simplemente la tangente) a la curva $y = f(x)$ en P.

Teorema 1. *La curva $y = f(x)$ tiene una tangente T en el punto $P = (x_0, f(x_0))$ si y solo si existe la derivada $f'(x_0)$. La pendiente de T es entonces igual a $f'(x_0)$.*

Demostración. Sea Q el punto $(x_0 + \triangle x, f(x_0) + \triangle x)$. La curva $y = f(x)$ es continua en x_0, por lo que

$$\lim_{\triangle x \to 0} f(x_0 + \triangle x) = f(x_0)$$

o equivalentemente

$$\lim_{\triangle x \to 0} [f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)] = \lim_{\triangle x} \triangle y = 0$$

Por lo tanto

$$|PQ| = \sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2}$$

se aproxima a cero si y sólo si $\triangle x \to 0$ de hecho $\triangle x \to 0$ implica $\triangle y \to 0$ y entonces

$$\sqrt{(\triangle x)^2 + (\triangle y)^2} \to 0$$

Además $0 < |\triangle x| \leq |PQ|$, así que $|PQ| \to 0$ implica $|\triangle x| \to 0$ y por lo tanto

$$\lim_{|PQ| \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} \tag{1}$$

existe si y sólo si

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} \tag{2}$$

existe Pero (1) es la pendiente de la tangente T a $y = f(x)$ en P, mientras que (2) es la derivada $f'(x_0)$. En otras palabras, $y = f(x)$ tiene una tangente T en P si y solo si $f'(x_0)$ existe Además, (1) y (2) son obviamente iguales si existen, es decir, T tiene pendiente $f'(x_0)$. □

Definición 1. *Si t es la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$, entonces la pendiente m de t se define como*

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ejemplo Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2$ en el punto $(3, 9)$.

Solución La ecuación de una recta punto-pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$, y en este caso $(x_0, y_0) = (3, 9)$ por lo tanto

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{9 + h6 + h^2 - 9}{h} = 6$$