Guia para el primer examen parcial

1.-Considere el siguiente conjunto

$$F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Demuestra que $(F,\ +,\ \cdot)$ es un campo donde $+$ y $\cdot$ son las operaciones usuales de los números reales

2.-Considere el siguiente conjunto

$$\mathbb{C} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

y las operaciones siguientes:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Demuestra que $(\mathbb{C},\ +,\ \cdot)$ es un campo.

3.-Prueba que en todo campo ordenado F se cumple

$$0 \leq x < y \ \Rightarrow\ \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y}$$

4.-Prueba que para todo campo ordenado F se cumple

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$$

5.-Demuestra por inducción matemática

a) $13^n - 6^n$ es divisible por 7

b) $2^{2n-1} + 1$ es divisible por 3

6.-Sea $n \in \mathbb{Z}$. Si n^2 es divisible por 2, entonces n es divisible por 2

7.-Si x es un número irracional, entonces $-x$ y x^{-1} también lo son.

8.-Prueba la siguiente extensión del principio forcing:

a) Si $\forall\ \epsilon > 0$, $x \geq -\epsilon$, entonces $x \geq 0$

b) Si $\forall\ \epsilon > 0$, $x \geq a - \epsilon$, entonces $x \geq a$

9.-Sea F un campo ordenado Arquimediano, $A \subseteq F$ y $u \in F$. Prueba el ϵ-criterio del supremo modificado. Si $u \notin A$, $u = \sup\ A \ \Leftrightarrow\ \forall\ \epsilon > 0$ se tiene

a) $\forall\ x \in A,\ x < u + \epsilon$ y

b) existen una infinidad de $x \in A$ tal que $x > u - \epsilon$

10.-Suponga que $A \subseteq B$ y $A \neq \emptyset$. Prueba que

a) Si B esta acotado inferiormente, entonces también lo es A y $\inf\ A \geq \inf\ B$

b) Si B esta acotado superiormente, entonces también lo es A y $\sup\ A \leq \sup\ B$