Tarea no. 2

Cálculo diferencial e intregral I

1. Dibujen el conjunto de puntos (x, y) en el plano tales que:

a) $|x + y| \leq 1$
b) $(x - 1)^2 - (y + 2)^2 \geq 1$

2. Sean f, g:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,¿Cómo son $f + g$, fg y $f \circ g$ si $f$es par y g es impar?

3. Demuestren que si f y g son inyectivas y $Ran(g) = Dom(f)$, entonces $f \circ g$ también es inyectiva. Obtengan $(f \circ g)^{-1}$ en términos de f^{-1}y g^{-1}. Interpreten con diagramas sus razonamientos.

4. Grafiquen las siguientes funciones, y establezcan cuál es el dominio y la imagen de cada una de ellas:

a) $f(x) = x - \frac{1}{x}$
b) $f(x) = \sqrt{1 - x}$

5. Grafiquen las siguientes funciones, y establezcan cuál es el dominio y la imagen de cada una de ellas:

a) $[|x|]$
b) $f(x) = El\,primer\,dígito\,en\,la\,expansión\,decimal\,de\,x$

6. Grafiquen la siguiente función, y establezcan cuál es su dominio y la imagen:

a) $f(x) = x\,|sen(x)|$

7. Grafiquen las siguientes funciones. Después, “compántenlas” en la horizontal un fractor 4, “estírenlas” en la vertical un factor 2, refléjanlas respecto al origen y recórranlas tres unidades a la izquierda y dos hacia abajo.

Grafiquen paso a paso lo que vayan obteniendo y digan cuál es el dominio y cuál es la expresión algebraíca de la función resultante:

a) $f : \mathbb{R}^+ \bigcup \{0\} \to \mathbb{R}$,$f(x) = x \cdot sen(x)$
b) $f : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$,$f(x) = cos(x)$

8. A las que siguen, reflějenlas respecto a la recta $x = x_0$, primero y $y = y_0$después; grafiquen el resultado y digan cuál es su dominio y cuál es su expresión resultante:

a) $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,$f(x) = sen(\frac{x}{2})$,$x_0 = 2$,$y_0 = -1$
b) $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$,$f(x) = (x + 2)(x^2 - 1)$, $x_0 = 1$,$y_0 = 1$

9. En los siguientes casos, digan y *demuestren formalmente* si la función es acotada o no en el dominio correspondiente. (Recuenden que para probar que $f$es acotada en $Dom(f)$ tiene que demostrar que $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m \leq f(x) \leq M\, \forall x \in Dom(f)$; o bien, que $\exists\, M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M\, \forall\, x \in Dom(f)$. Y para demostrar que f no es acotada en $Dom(f)$,tienen que *demostrar* que $\forall\, M > 0\, \exists\, x_M \in Dom(f)$ tal que $|f(x_M)| \geq M$):

a) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$
b) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^3}$

10. En los siguientes casos digan si la función es creciente, decreciente o ninguna de las dos en el dominio señalado. Demuestren formalmente sus respuestas:

a) $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}$
b) $f : [2, 10] \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + x + 1$