Continuidad

El concepto de función continua se introduce en un curso de cálculo típico de primer año. Por supuesto, pero no se investiga en profundidad allí porque los conceptos aplicados son considerados como más importantes en ese curso. Sin embargo, el concepto de continuidad. es de gran importancia en el análisis. Brevemente, recordará la noción intuitiva de continuidad:
Una función es continua si puede dibujar su gráfico sin levantar tu lápiz del papel.
Esta definición es obviamente demasiado vaga para ser rigurosa.
Para fines matemáticos al comenzar el cálculo, se hace un intento de ser más riguroso: allí, una función se define como continua en un punto x_0 si tres se cumplen las condiciones:

a) $f(x_0)$ existe

b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe

c) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Esta definición que vamos a utilizar es equivalente a estas tres condiciones solo cuando x_0 es un punto de agrupación del dominio de f. Se inicia como un criterio $\epsilon\ -\ \delta$.

Definición 1. *Supongamos que $f : D(f) \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in D(f)$. Entonces f es continua en x_0 si*

$$\forall\ \epsilon\ >\ 0,\ \exists\ \delta\ >\ 0\ \ni\ \forall\ x\ \in\ D(f),\ |\ x - x_0\ |\ <\ \delta\ \Rightarrow\ |\ f(x) - f(x_0)\ |\ <\ \epsilon$$

Ejemplo Pruebe usando la definición de continuidad de una función en un punto, que la función $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ es continua en $x_0 = 2$

Solución En este caso tenemos que

$$f(x_0) = f(2) = 3(2)^2 - 2(2) - 1 = 7$$

Nuestro trabajo es probar

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

En este caso

$$\lim_{x\to 2} \left(3x^2 - 2x - 1\right) = f(2) = 7$$

según el criterio $\epsilon\ -\ \delta$ debemos mostar que

$$\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0,\quad \ni\ \ |x - 2| < \delta\ \Rightarrow\ |(3x^2 - 2x - 1) - 7| < \epsilon$$

Tenemos que

$$|3x^2 - 2x - 1 - 7| = |3x^2 - 2x - 8| = |\ (3x + 4)\ (x - 2)\ | = |3x + 4|\ |x - 2|$$

Como necesitamos $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, es decir

$$|3x + 4|\ |x - 2| < \epsilon$$

Consideramos un $\delta = 1$ y tenemos que

$$\begin{aligned}
|x-2| < \delta &\Rightarrow |x-2| < 1 \\
&\Rightarrow -1 < x-2 < 1 \\
&\Rightarrow 1 < x < 3 \\
&\Rightarrow 3 < 3x < 9 \\
&\Rightarrow 7 < 3x+4 < 13 \\
&\Rightarrow -13 < 7 < 3x+4 < 13 \\
&\Rightarrow |3x+4| < 13
\end{aligned}$$

por lo que

$$|3x+4|\,|x-2| < 13 \cdot \delta$$

Si tomamos

$$\epsilon = 13 \cdot \delta \Rightarrow \delta = \frac{\epsilon}{13}$$

tenemos entonces el valor $\delta = \frac{\epsilon}{13}$. De manera que proponemos

$$\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\epsilon}{13}\right\}$$

y con esta δ se tiene

$$\begin{aligned}
|x-2| < \delta &\Rightarrow |x-2| < 1 \;\; y \;\; |x-2| < \frac{\epsilon}{13} \\
&\Rightarrow -1 < x-2 < 1 \;\; y \;\; |x-2| < \frac{\epsilon}{13} \\
&\Rightarrow 1 < x < 3 \;\; y \;\; |x-2| < \frac{\epsilon}{13} \\
&\Rightarrow 3 < 3x < 9 \;\; y \;\; |x-2| < \frac{\epsilon}{13} \\
&\Rightarrow 7 < 3x+4 < 13 \;\; y \;\; |x-2| < \frac{\epsilon}{13} \\
&\Rightarrow -13 < 7 < 3x+4 < 13 \;\; y \;\; |x-2| < \frac{\epsilon}{13} \\
&\Rightarrow -13 < 3x+4 < 13 \;\; y \;\; |x-2| < \frac{\epsilon}{13} \\
&\Rightarrow |3x+4| < 13 \;\; y \;\; |x-2| < \frac{\epsilon}{13} \\
&\Rightarrow |3x+4| \cdot |x-2| < 13 \cdot \frac{\epsilon}{13} \\
&\Rightarrow |(3x+4)\cdot(x-2)| < 13 \cdot \frac{\epsilon}{13} \\
&\Rightarrow |3x^2-2x-8| < \epsilon \\
&\Rightarrow |(3x^2-2x-1)-7| < \epsilon
\end{aligned}$$

por lo tanto la función $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ es continua en $x_0 = 2$