## Álgebra de funciones continuas

**Teorema 1.** *Supongamos que $f$ y $g$ son funciones continuas en un punto $x_0$. Entonces*

*a)* $c \cdot f$ *es continua en* $x_0$

*b)* $f + g$ *es continua en* $x_0$

*c)* $f - g$ *es continua en* $x_0$

*d)* $f \cdot g$ *es continua en* $x_0$

*e)* $\dfrac{1}{g}$ *es continua en* $x_0$ *si* $g(x_0) \neq 0$

*f)* $\dfrac{f}{g}$ *es continua en* $x_0$ *si* $g(x_0) \neq 0$

*Demostración.* a) Como $f$ es continua en $x_0$ se tiene

$$\lim_{x\to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) = c \cdot f(x_0)$$

b) Como $f$ y $g$ son funciones continuas en $x_0$ se tiene

$$\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0)$$

c) Como $f$ y $g$ son funciones continuas en $x_0$ se tiene

$$\lim_{x\to x_0} (f-g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) - g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) - g(x_0) = (f-g)(x_0)$$

d) Como $f$ y $g$ son funciones continuas en $x_0$ se tiene

$$\lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)\cdot g(x_0) = (f\cdot g)(x_0)$$

e) Como $g$ es continua en $x_0$ y $g(x_0) \neq 0$ se tiene

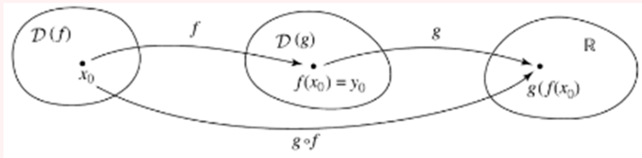
$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} 1}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{1}{g(x_0)} = \left(\frac{1}{g}\right)(x_0)$$

f) Como $f$ y $g$ son funciones continuas en $x_0$ y $g(x_0) \neq 0$ se tiene

$$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)$$

□

**Teorema 2.** *Supongamos que $f$ es continua en $x_0$, y $g$ continua en $f(x_0)$ entonces $f \circ g$ es continua en $x_0$.*




*Demostración.* Supongamos que $f$ es continua en $x_0$, y $g$ continua en $f(x_0)$. Sea $\varepsilon > 0$ como $g$ es continua en $f(x_0)$, para este $\varepsilon$ $\exists$ $\delta > 0$ tal que $\forall\ y \in D(g)$

$$|y - f(x_0)| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon \qquad (1)$$

Si $f$ es continua en $x_0$, $\exists\ \delta' > 0 \ni \forall\ x \in D(g \circ f)$

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta' &\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta \\ &\Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon \\ &\Rightarrow |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| < \varepsilon \end{aligned}$$

$\therefore$ $fog$ es continua en $x_0$. □

**Ejercicio** Suponga que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ y g es continua en $y_0$ entonces

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) = g(y_0)$$

*Demostración.* Supongamos que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0 \in D(g)$, y g es continua en $y_0$. Sea $\epsilon > 0$. Como g es continua en $y_0$, $\exists\ \delta > 0 \ni \forall\ y \in D(g)$

$$|y - y_0| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \epsilon$$

Como $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $\exists\ \delta' > 0 \ni \forall\ x \in D(g \circ f)$

$$\begin{aligned} 0 < |x - x_0| < \delta' &\Rightarrow |f(x) - y_0| < \delta \\ &\Rightarrow |g(f(x)) - g(y_0)| < \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)$$

□

**Ejercicio** Demostrar que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0$ y g es continua en $y_0$ entonces

$$\lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = g(y_0) = g\left(\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$$

*Demostración.* g continua en $y_0$ quiere decir

$$\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ \delta\ >\ 0,\ \ tal\ \ que\ \ |y - y_0|\ <\ \delta\ \Rightarrow\ |g(y) - g(y_0)|\ <\ \epsilon \qquad (1)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0$ quiere decir

$$\forall\ \epsilon\ >\ 0\ \ \ \exists\ N\ >\ 0,\ \ \ni\ \forall\ x \in D(f),\ x\ >\ N\ \Rightarrow\ |f(x) - y_0|\ <\ \epsilon$$

en esta última desigualdad consideramos $\epsilon = \delta$ por lo que

$$N > 0, \quad \Rightarrow\ |f(x) - y_0| < \delta \underbrace{\Rightarrow}_{(1)} |g(f(x)) - g(y_0)| < \epsilon$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = g(y_0) = g\left(\lim_{x\to\infty} f(x)\right)$$

□