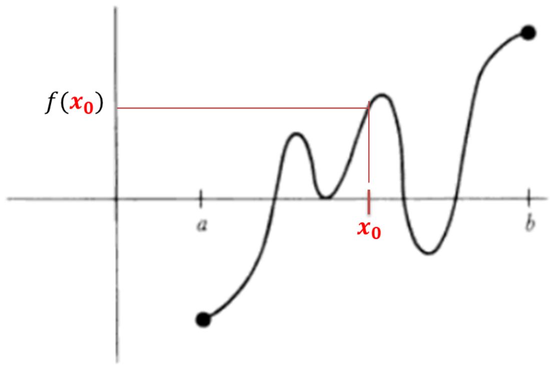
Teorema 1. *Teorema Conservación de signo Supongase que f es continua en x_0 y $f(x_0) \neq 0$ entonces*

$$\exists \ \ \delta > 0 \ \ tal \ \ que \ \ 0 \ < \ |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \neq \ 0$$

Demostración. Suponemos que $f(x_0) > 0$



como f es una función continua en x_0

$$\forall \ \ \varepsilon > 0, \ \ \exists \ \ \delta > 0 \ \ \ni \ 0 < |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

en particular para $\varepsilon = f(x_0) > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} 0 \ < \ | \ x - x_0 \ | \ < \ \delta \ \Rightarrow & \\ & \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < f(x_0) \\ & \Rightarrow \ -f(x_0) < f(x) - f(x_0) < f(x_0) \\ & \Rightarrow \ 0 < f(x) < 2f(x_0) \end{aligned}$$

Por lo tanto $0 < f(x)$.
Análogamente de la suposición de $f(x_0) < 0$ concluimos que $f(x) < 0$ para $|x - x_0| < \delta$.
Por lo tanto si f es continua en x_0 y $f(x_0) \neq 0$ entonces

$$\exists \ \ \delta > 0 \ \ tal \ \ que \ \ 0 \ < \ |x - x_0| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad f(x) \neq \ 0$$

□

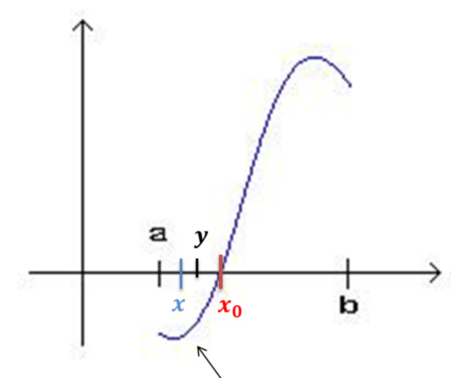
Teorema de Bolzano

Lema 1. *Teorema de Bolzano Sea f continua sobre $[a,b]$ y $f(a) < 0 < f(b)$ entonces*

$$\exists \;\; x_0 \in [a,b] \;\; \ni \;\; f(x_0) = 0$$

Demostración. Definimos el conjunto

$$A = \{x \in [a,b] \mid f \quad es \;\; negativa \;\; en \quad [a,y] \subset [a,b]\}$$



$f(x) < 0, \qquad x \in [a,y]$

1) $A \neq \emptyset$ pues $a \in A$ ya que $f(a) < 0$ y $a \in [a,y]$

2) b es cota superior de A ya que $\forall \;\; x \in A, \;\; b \geq x$

$\therefore \quad A$ tiene una cota superior mínima x_0 con $a \leq x_0 \leq b$

Vamos a comprobar que $f(x_0) = 0$ eliminando las posibilidades $f(x_0) < 0$ y $f(x_0) > 0$
Caso $f(x_0) > 0$

Según el **teorema de conservación del signo** si f es continua en x_0 y $f(x_0) > 0$ entonces

$$\exists \;\; \delta > 0 \;\; tal \; que \; si \;\; 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0$$

Es decir

$$\exists \;\; \delta > 0 \;\; \ni \;\; x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0 \tag{1}$$

como $x_0 = \sup \;\; A$

$\exists \;\; x_1 \in A$ tal que $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0]$ esto significa que f es negativa en $[a, x_1]$ <u>CONTRADICCIÓN</u>

Pues según (1) se tiene $f(x_1) > 0$ donde $|x_1 - x_0| < \delta$.

Por lo tanto $f(x_0) > 0$ no se cumple.

Un razonamiento similar muestra que $f(x_0) < 0$ no ocurre, y por lo tanto $f(x_0) = 0$ $\square$

Ejemplo Muestre que la ecuación

$$x^{179} + \frac{163}{1 + x^2 + \sin^2(x)} = 119$$

tiene una solución en $x_0 \in \mathbb{R}$

Solución Para esto definimos la función

$$f(x) = x^{179} + \frac{163}{1 + x^2 + \sin^2(x)} - 119$$

vamos ahora a mostrar que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$
Por un lado tenemos que

$$f(0) = 0^{179} + \frac{163}{1 + 0^2 + \sin^2(0)} - 119 = 44 > 0$$

Por otro lado

$$f(1) = 1^{179} + \frac{163}{1 + 1^2 \sin^2(1)} - 119 < -36 < 0$$

Es decir $f(1) < 0 < f(0)$ y f es continua sobre $[0, 1]$. Por lo que se satisfacen las hipótesis del **teorema de Bolzano** $\therefore \ \exists \ x_0 \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$. Por lo tanto la ecuación tiene una solución en $x_0 \in \mathbb{R}$.

Ejemplo En la siguiente función polinómica f, hallar un entero n tal que $f(x_0) = 0$ para algún x_0 entre n y $n + 1$

$$f(x) = x^5 + x + 1$$

Solución En este caso

$$f(-1) = (-1)^5 + (-1) + 1 = -1 < 0$$

Por otro lado

$$f(0) = (0)^5 + 0 + 1 = 1 > 0$$

Es decir $f(-1) < 0 < f(0)$ y f es continua sobre $[-1, 0]$. Por lo que se satisfacen las hipótesis del **teorema de Bolzano** $\therefore \ \exists \ x_0 \in [-1, 0]$ tal que $f(x_0) = 0$ para x_0 entre $n = -1$ y $n + 1 = 0$