## Conceptos básicos de funciones

**Definición 1.** *Si $X$, $Y$ son conjuntos no vacíos.* ***Una función*** *$f$ del conjunto $X$ en el conjunto $Y$ es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento $x \in X$ un único elemento $f(x) \in Y$. El conjunto $X$ es llamado el domiunio de la función $f$, y el conjunto $Y$ es llamado el codominio de la función $f$.*

**Definición 2.** *El conjunto $X$ es llamado el* ***dominio*** *de $f$, se puede describir como el conjunto*

$$\mathfrak{D}(f) = \{x \in X \mid \exists\ f(x) = y \in Y\}$$

**Definición 3.** *El conjunto*

$$\mathfrak{R}(f) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

*es llamado el* ***rango*** *de $f$.*

A menudo denotamos el dominio de f por $\mathfrak{D}(f)$. El rango de la función es un subconjunto del codominio. La notación para una función es:

$$f : X \to Y$$

**Definición 4.** *La* ***gráfica*** *de una función $f = X \to Y$, donde $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, es el conjunto de todos los puntos $(x, y)$ en el plano cartesiano, con $y = f(x)$. Esto es*

$$G_f = \{(x, f(x) \mid x \in D(f))\}$$

**Ejemplo** Sea $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por la regla de correspondencia

$$f(x) = \frac{1}{x-4}$$

Encontrar

1. El dominio de la función $D(f)$
2. El rango de la función $R(f)$
3. La gráfica de la función $G_f$

**Solución** En este caso se tiene que

1. $\mathfrak{D}(f) = \{x \in X \mid \exists\ f(x) = y \in Y\}$. Por lo que

$$y = f(x) \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{x-4} \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ x - 4 \neq 0 \ \Leftrightarrow\ x \in (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$$

por lo tanto

$$X = \mathfrak{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\} = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)\}$$

2. En este caso

$$\mathfrak{R}(f) = \left\{ y = \frac{1}{x-4} \in Y \ \middle|\ x \in (-\infty, 4) \cup (4, \infty) \right\}$$

Tenemos que

$$y = \frac{1}{x-4} \quad \Rightarrow \quad x - 4 = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4y+1}{y}$$

Por lo tanto

$$x = \frac{4y+1}{y} \in (-\infty, 4) \cup (4, \infty) \;\Leftrightarrow\; y \in \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \frac{4y+1}{y} < 4 \right\} \;\; ó \;\; y \in \left\{ y \in \mathbb{R} \mid \frac{4y+1}{y} > 4 \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad y \in \left\{ y \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{4y+1}{y} < 4 \right\} \bigcup \left\{ y \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{4y+1}{y} > 4 \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad y \in \left\{ y \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{4y+1-4y}{y} < 0 \right\} \bigcup \left\{ y \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{4y+1-4y}{y} > 0 \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad y \in \left\{ y \;\middle|\; \frac{1}{y} < 0 \right\} \bigcup \left\{ y \;\middle|\; \frac{1}{y} > 0 \right\}$$

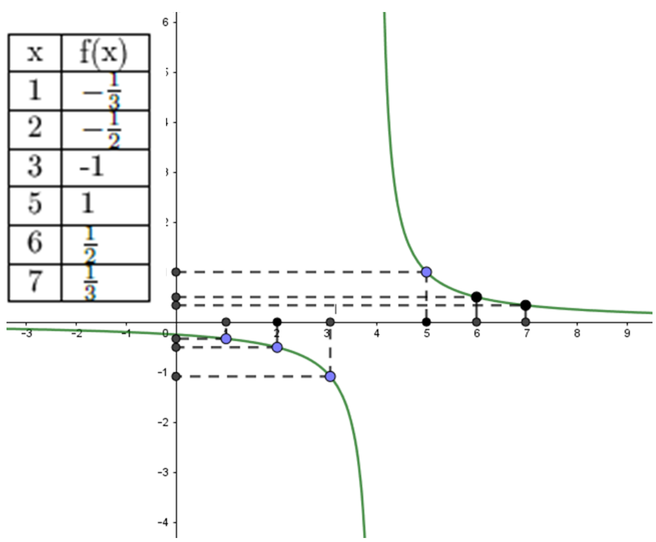
$$\Rightarrow \quad y \in \{ y \in \mathbb{R} \mid y < 0 \} \cup \{ y \in \mathbb{R} \mid y > 0 \}$$

$$\Leftrightarrow \quad y \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

Por lo tanto

$$\mathfrak{R}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

3. En este caso hallaremos el conjunto de todos los puntos $(x, f(x))$ en el plano cartesiano, en la siguiente tabla algunos puntos



| x | f(x) |
|---|---|
| 1 | $-\frac{1}{3}$ |
| 2 | $-\frac{1}{2}$ |
| 3 | -1 |
| 5 | 1 |
| 6 | $\frac{1}{2}$ |
| 7 | $\frac{1}{3}$ |

**Definición 5.** *Dos funciones* $f : X \to Y$ *y* $g : X' \to Y'$ *se dice que son iguales si*

$$X = X', \quad Y = Y', \quad y \quad \forall\, x \in \; X, \quad f(x) = g(x)$$

**Definición 6.** *Función acotada*
*Se dice que* $f : X \to Y$ *está acotada si el conjunto de números reales* $f(X)$ *está acotado; es decir, existe* $k > 0$ *tal que* $|f(x)| \leq k \; \forall x \in A$

**Ejemplo** Sea $f : X \to Y$ dada por $\dfrac{1}{x^2+1}$. Vamos a comprobar que f es acotada

**Solución** En este caso tenemos que

$$x^2 \geq 0 \; \forall\, x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; x^2+1 \geq 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x^2+1} \leq 1 \;\Rightarrow\; -1 < 0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1$$

por lo tanto

$$\left|\frac{1}{x^2+1}\right| < 1$$

por lo tanto f es una función acotada

**Definición 7.** *Función Par*
*Una función* $f : X \to Y$ *se dice que es par si* $f(x) = f(-x) \; \forall x \in \mathbb{R}$

**Ejemplo** Sea $f : X \to Y$ dada por $\dfrac{1}{x^2+1}$. Vamos a comprobar que f es par

**Solución** En este caso tenemos que

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x)$$

por lo tanto f es una función par

**Definición 8.** *Función Impar*
*Una función* $f : X \to Y$ *se dice que es impar si* $f(x) = -f(-x) \; \forall x \in \mathbb{R}$

**Ejemplo** Sea $f : X \to Y$ dada por $x^3$. Vamos a comprobar que f es impar

**Solución** En este caso tenemos que

$$-f(-x) = -(-x)^3 = x^3 = f(x)$$

por lo tanto f es una función impar

**Definición 9.** *Función Periódica*
*Una función* $f : X \to Y$ *se dice que es periódica si* $\exists\; T > 0$ *tal que* $f(x+T) = f(x) \; \forall x \in X$*. El número* $T$ *es el periodo de la función*

**Ejemplo** Sea $f : X \to Y$ dada por $f(x) = x + [x]$. Donde $[x]$ denota al mayor entero $\leq x$. Vamos a comprobar que f es periódica

**Solución** En este caso tenemos que

$$x \in (1,2) \;\Rightarrow\; [x] = 1 \;\Rightarrow\; x - [x] = x - 1$$

por ejemplo

$$x = 1{,}5 \in (1,2) \;\Rightarrow\; [1{,}5] = 1 \;\Rightarrow\; x - [x] = 1{,}5 - 1 = {,}5$$

mientras que

$$x \in (2,3) \;\Rightarrow\; [x] = 2 \;\Rightarrow\; x - [x] = x - 2$$

por ejemplo

$$x = 2{,}5 \in (1,2) \;\Rightarrow\; [2{,}5] = 2 \;\Rightarrow\; x - [x] = 2{,}5 - 2 = {,}5$$

por lo tanto $f(x) = x - [x]$ es una función periódica

**Definición 10.** *Función Monotona*
*Una función $f : X \to Y$ se dice que es monótona creciente si para dos puntos arbitrarios $x$ y $x'$ de $X$ tales que $x < x'$ se verifica: $f(x) \leq f(x')$. Estrictamente creciente si $f(x) < f(x')$. $\forall x, x' \in X$*

**Ejemplo** Sea $f : X \to Y$ dada por $f(x) = x^3$. Vamos a comprobar que f es monotona estrictamente creciente

**Solución** En este caso tenemos que

$$x < x_1 \;\Rightarrow\; x^3 < x_1^3 \;\Rightarrow\; f(x) < f(x_1)$$

por lo tanto $f(x) = x^3$ es una función monotona estrictamente creciente

**Definición 11.** *Función Monotona*
*Una función $f : X \to Y$ se dice que es monótona decreciente si para dos puntos arbitrarios $x$ y $x'$ de $X$ tales que $x < x'$ se verifica: $f(x) \geq f(x')$. Estrictamente creciente si $f(x) > f(x')$. $\forall x, x' \in X$*

**Ejemplo** Sea $f : X \to Y$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Vamos a comprobar que f es monotona estrictamente decreciente

**Solución** En este caso tenemos que

$$x < x_1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x_1} < \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x)$$

por lo tanto $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es una función monotona estrictamente decreciente

**Definición 12.** *Función Constante*
*Una función $f : X \to Y$ se dice que es constante si $f(x) = c \; \forall x \in X$*

**Ejemplo** Sea $f : X \to Y$ dada por $f(x) = 5$. Vamos a comprobar que f es cosntante

**Solución** En este caso tenemos que

$$x < x_1 \ \Rightarrow \ \ f(x) = 5 = f(x_1)$$

por lo tanto $f(x) = 5$ es una función constante

**Definición 13.** *Función Identidad*
*Es una función $f : X \to Y$ tal que $f(x) = x \ \forall x \in X$*

**Definición 14.** *Función Característica*
*Si $S$ es un subconjunto de $X$ se define en $X$ una función real llamada función característica del conjunto $S$*

$$X_S : X \to Y \quad como \quad X_S(x) = \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}$$

**Definición 15.** *Función Polinomial*
*Se designará con el nombre de función polinomial a cualquier función cuya regla de correspondencia esté dada por una fórmula del tipo*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$$

*donde $n$ es un número natural o cero y los coeficientes $a_i$ son números reales.*

**Definición 16.** *Función Racional*
*Se designará con el nombre de función racional a cualquier función cuya regla de correspondencia esté dada como el cociente de dos polinomios*

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \cdots + b_0}$$

*$f$ está definida para todos los valores de $x$ en los que no se anula el denominador.*

**Definición 17.** *Función inyectiva ó uno-uno*
*Una función $f : X \to Y$ se dice que es inyectiva ó uno-uno si:*

$$Dados \quad x_1, x_2 \in Dom_f \quad tal \quad que \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

*Equivalentemente, mediante la implicación contrarreciproca, podemos decir Una función $f : A \to B$ se dice que es inyectiva, biunívoca ó uno-uno si:*

$$\forall \ x_1, x_2 \in A \quad tal \quad que \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

**Ejemplo** *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$.*
*Para ver que $f$ es inyectiva*

$$Sean \quad x_1, x_2 \in Dom_f \quad tal \quad que \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \therefore \quad f \quad es \quad inyectiva$$

**Definición 18.** *Función Suprayectiva ó Sobreyectiva*
*Sea una función $f : X \to Y$. Si ocurre que $\mathfrak{R}(f) = Y$. Esto es*

$$f : X \to Y \quad es \quad sobreyectiva \ \Leftrightarrow \ \forall \ y \ \in \ Y, \ \exists \ x \in X \ \ni \ f(x) = y$$

**Ejemplo** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x + 1$. Para ver que es suprayectiva tenemos que

$$\forall\, y \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; y = f(x) \;\Rightarrow\; y = -x + 1 \; p \; a \; x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; x = 1 - y$$

por lo tanto

$$f(x) = f(1 - y) = -(1 - y) + 1 = -1 + y + 1 = y$$

y f es sobreyectiva

**Definición 19.** *Función Biyectiva*
*Sea una función $f : X \to Y$. Si ocurre que $\Re(f) = Y$. Y además $f$ es uno-uno, se dice que $f$ es biyectiva*

**Ejemplo** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x + 1$. Para ver que es inyectiva tenemos que

$$Sean \;\; x,\; x_1 \in \mathbb{R}, \;\; \ni \; f(x) = f(x_1) \;\Rightarrow\; -x + 1 = -x_1 + 1 \;\Rightarrow\; -x = -x_1 \;\Rightarrow\; x = x_1$$

y por lo tanto f es inyectiva.
Para ver que es suprayectiva tenemos que

$$\forall\, y \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; y = f(x) \;\Rightarrow\; y = -x + 1 \; p \; a \; x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; x = 1 - y$$

por lo tanto

$$f(x) = f(1 - y) = -(1 - y) + 1 = -1 + y + 1 = y$$

y f es sobreyectiva y en consecuencia f es biyectiva