Limite de una Sucesion

Definición 1. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión y L un número real. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \;\Leftrightarrow\; \forall\ \epsilon\ >\ 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \ni\ n \geq n_0\ \Rightarrow\ |x_n - L| < \epsilon$$

Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$, nosotros decimos que $\{x_n\}$ converge a L; y escribimos

$$\boxed{x_n \to\ L}$$

Si no hay un número real al que converja la sucesión $\{x_n\}$, decimos que $\{x_n\}$ diverge.

Usando la definición para probar que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. Usar la definición requerirá un cambio mental de raciocinio. Ignorando los cuantificadores por el momento, observe que la implementación de la definición requerirá que demostremos que una desigualdad implica otra.
Específicamente, debemos mostrar que la desigualdad $n_0 < n$ implica la desigualdad $|x_n - L| < \epsilon$.
Cuando usamos los cuantificadores $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, y $\forall\ n \in \mathbb{N}$, puede parecer bastante confuso. El secreto para evitar confusiones es entender lo que significa la definición.
Intuitivamente, significa que debemos demostrar que corresponde a un número real positivo arbitrario ϵ, después de un cierto número n_0 de términos, todos los términos restantes de la secuencia estarán dentro de una distancia ϵ de L.

Parafraseando la definición $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. Se tiene

- x_n puede hacerse arbitrariamente cerca de L haciendo n lo suficientemente grande.
- $|x_n - L|$ puede hacerse arbitrariamente pequeño haciendo n suficientemente grande.
- Para cada ϵ positiva hay algun n_0 tal que $|x_n - L| < \epsilon$ siempre que $n \geq n_0$

Observe el importante papel que juegan las desigualdades en la definición. La explicación más simple para esto es que el análisis debe tratar con el infinito; tanto lo infinitamente grande como lo infinitamente pequeño. Dado que ningún número real es infinitamente grande o infinitamente pequeño, debemos encontrar una manera de expresar el concepto de infinito utilizando solo cantidades finitas. Yo llamo a este problema de finitizar lo infinito. Era un problema de importancia crítica en el desarrollo del análisis como un tema riguroso, y fue resuelto en el siglo XIX por Cauchy, Weierstrass y otros. Su descubrimiento notable fue que la desigualdad y los cuantificadores proporcionan las herramientas matemáticas perfectas para finitar el infinito. Al ingresar a este curso, no se sentirá muy cómodo ni con las desigualdades ni con los cuantificadores. No ha tenido que usarlos como ha usado las ecuaciones. Por eso es necesario el cambio mental de raciocinio. Para tener éxito en el análisis, se volverá bastante hábil en el manejo de desigualdades y cuantificadores.

Estrategia para usar la definición para demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. Se tiene que

1. Comience dejando que ϵ denote un número real positivo arbitrario. Eso significa, simplemente asumir $\epsilon > 0$; no sabes nada de ϵ aparte de que es positivo.
2. Examine la desigualdad $|x_n - L| < \epsilon$. Trate de averiguar qué tan grande debe ser n para garantizar que $|x_n - L| < \epsilon$. Esto equivale a jugar con desigualdades
3. Una vez que piense que ha encontrado un valor para n_0 que garantizará que

$$n > n_0 \;\Rightarrow\; |x_n - L| < \epsilon$$

Débe probar que esta implicación es verdadera.

Ejemplo Considere el limite $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{3n-7}\right) = \dfrac{2}{3}$.

a) Después de cuántos términos garantizamos que $\dfrac{2n+3}{3n-7}$ está a una distancia de .01 de $\dfrac{2}{3}$

b) Después de cuántos términos garantizamos que el enésimo término de esta sucesión es una aproximación precisa del límite, cercana a 3 decimales

c) Para $\epsilon > 0$ arbitrario, después de cuántos términos garantizamos que $\dfrac{2n+3}{3n-7}$ está dentro de una distancia ϵ de $\dfrac{2}{3}$.

Solución En este caso tenemos

a) Queremos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_0 \leq n \;\Rightarrow\; \left|\frac{2n+3}{3n-7} - \frac{2}{3}\right| < \epsilon$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\frac{2n+3}{3n-7} - \frac{2}{3}\right| &= \left|\frac{3(2n+3)-2(3n-7)}{3(3n-7)}\right| \\ &= \left|\frac{6n+9-6n+14}{3(3n-7)}\right| \\ &= \left|\frac{23}{9n-21}\right| \\ &= \frac{23}{|9n-21|}\end{aligned}$$

Podemos eliminar las barras de valor absoluto en el denominador si $9n - 21 > 0$ esto es

$$\begin{aligned}9n-21>0 &\;\Rightarrow\; 9n > 21 \\ &\;\Rightarrow\; n > \frac{21}{9} = 2{,}3 \\ &\;\Rightarrow\; n > 3\end{aligned}$$

Por lo tanto, cuando $n \geq 3$ se tiene $|9n-21| = 9n-21$. Por lo tanto, nuestro objetivo ahora es encontrar un n_0 que cumpla tanto $n_0 \geq 3$ como

$$n_0 \leq n \;\Rightarrow\; \frac{23}{9n-21} < ,01$$

La última desigualdad será verdadera si

$$\begin{aligned}\frac{9n-21}{23} &> 100\\ 9n-21 &> 2300\\ 9n &> 2321\\ n &> 257{,}88\end{aligned}$$

Tomamos entonces $n_0 = 258$. Ésta n_0 cumple $n_0 \geq 3$ y $n_0 \geq 257{,}88$.
Nosotros hemos demostrado que

$$258 = n_0 \leq n \;\Rightarrow\; \left|\frac{2n+3}{3n-7} - \frac{2}{3}\right| < ,01$$

b) Para asegurarnos de que el enésimo término de la secuencia se aproxima con precisión al límite de tres decimales, queremos garantizar que el redondeo a tres decimales no provoque un cambio en el tercer dígito decimal. Ees decir, queremos garantizar que el enésimo término esté dentro de .00005 del límite. Entonces queremos encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_0 \leq n \;\Rightarrow\; \left|\frac{2n+3}{3n-7} - \frac{2}{3}\right| < ,00005$$

Como se muestra arriba, si $n \geq 3$

$$\left|\frac{2n+3}{3n-7} - \frac{2}{3}\right| = \frac{23}{9n-21}$$

Por lo tanto, nuestro objetivo es encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \geq 3$ y

$$n_0 \leq n \;\Rightarrow\; \frac{23}{9n-21} < ,0005 = \frac{1}{2000}$$

La última desigualdad es cierta si

$$\begin{aligned}\frac{23}{9n-21} &> 2000\\ 9n-21 &> 46000\\ 9n &> 46021\\ n &> 5113{,}444\end{aligned}$$

Tomamos entonces $n_0 = 5114$.
Nosotros hemos demostrado que

$$5114 = n_0 \leq n \;\Rightarrow\; \left|\frac{2n+3}{3n-7} - \frac{2}{3}\right| < ,001$$

Es decir, cuando $n \geq 5114$, x_n se aproximará al $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ a tres decimales

c) Sea $\epsilon > 0$ un número positivo fijo pero arbitrario. Nosotros queremos encontrar un

$$n_0 \in \mathbb{N} \ \ni \ n_0 \leq n \ \Rightarrow \ \left|\frac{2n+3}{3n-7} - \frac{2}{3}\right| < \epsilon$$

Como se muestra arriba, si $n \geq 3$

$$\left|\frac{2n+3}{3n-7} - \frac{2}{3}\right| = \frac{23}{9n-21}$$

Por lo tanto, nuestro objetivo es encontrar un $n_0 \in \mathbb{N} \ \ni \ n_0 \geq 3$ y

$$n_0 \leq n \ \Rightarrow \ \frac{23}{9n-21} < \epsilon$$

Tenga en cuenta que cuando $n \geq 3$

$$\begin{aligned} \frac{23}{9n-21} &< \frac{27}{9n-21} \qquad (\textit{ya que } 23 < 27 \ \ y \ \ 9n-21 > 0) \\ &< \frac{27}{9n-27} \qquad \left(-21 > -27 \ \Rightarrow \ 9n-21 > 9n-27 \ \Rightarrow \ \frac{1}{9n-21} < \frac{1}{9n-27}\right) \\ &< \frac{3}{n-3} \end{aligned}$$

Así, cuando $n > 3$, $\dfrac{23}{9n-21} < \epsilon$ si $\dfrac{3}{n-3} < \epsilon$. Pero la última desigualdad estará garantizada si

$$\begin{aligned} \frac{3}{n-3} &< \epsilon \frac{1}{\epsilon} \qquad\qquad < \frac{n-3}{3} \\ \frac{3}{\epsilon} &< n-3 \\ \frac{3}{\epsilon} + 3 &< n \end{aligned}$$

Por la propiedad Arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{3}{\epsilon} + 3$. Tomamos éste n_0 y el analisis mostrado arriba muestra que

$$n_0 \leq n \ \Rightarrow \ \left|\frac{2n+3}{3n-7} - \frac{2}{3}\right| < \epsilon$$

Prueba Preste especial atención a la prueba que se proporciona aquí, ya que servirá como paradigma para las pruebas que deberá presentar.

Sea $\epsilon > 0$. Por la propiedad Arquimediana, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N} \ \ni\ n_0 > \dfrac{3}{\epsilon} + 3$. Entonces

$$
\begin{aligned}
n_0 \leq n \ &\Rightarrow\ \frac{3}{\epsilon} + 3 < n \quad y \quad 3 < n \\
&\Rightarrow\ \frac{3}{\epsilon} < n - 3 \quad y \quad 0 < n - 3 \\
&\Rightarrow\ \frac{1}{\epsilon} < \frac{n-3}{3} \quad y \quad 0 < n - 3 \\
&\Rightarrow\ \frac{3}{n-3} < \epsilon \\
&\Rightarrow\ \frac{27}{9n-27} < \epsilon \\
&\Rightarrow\ \frac{23}{9n-21} < \epsilon \left(-21 > -27 \ \Rightarrow\ 9n - 21 > 9n - 27 \ \Rightarrow\ \frac{1}{9n-21} < \frac{1}{9n-27} \quad y \quad 23 < 27 \right) \\
&\Rightarrow\ \left| \frac{23}{9n-21} \right| < \epsilon \\
&\Rightarrow\ \left| \frac{6n + 9 - 6n + 14}{3(3n-7)} \right| < \epsilon \\
&\Rightarrow\ \left| \frac{3(2n+3) - 2(3n-7)}{3(3n-7)} \right| < \epsilon \\
&\Rightarrow\ \left| \frac{2n+3}{3n-7} - \frac{2}{3} \right| < \epsilon
\end{aligned}
$$

Esto es, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$
n_0 \leq n \ \Rightarrow\ \left| \frac{2n+3}{3n-7} - \frac{2}{3} \right| < \epsilon
$$

Por lo tanto

$$
\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n+3}{3n-7} \right) = \frac{2}{3}
$$

por la definición