Divergencia de una Sucesion

Ejemplo Dada la sucesión de término general

$$x_n = 4n - 5$$

algunos de sus términos son

$x_1 = -1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 7,\ x_4 = 11,\ x_5 = 15,\ x_6 = 19,\ x_7 = 23,\ x_8 = 27,\ x_9 = 31,\ x_{10} = 35,\ x_{11} = 39, \cdots$

se observa en esta sucesión que mientras n va creciendo dicha sucesión se va haciendo más grande y no converge.
Esto querria decir que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

cuando una sucesión $\{x_n\}$ no converge, decimos que diverge, y escribimos

$$\boxed{x_n \to \ +\infty}$$

entonces $\{x_n\}$ es no acotada, así que no diremos que x_n converge a $+\infty$.

Definición 1. *Suponga que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales. Se dice que*

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \ \textit{diverge a} \ +\infty \quad \left(\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty\right) \quad \textit{si}$$

$$\forall\ M > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \ni\ n \geq n_0\ \Rightarrow\ x_n > M$$

Ejemplo Considere el límite de la sucesión

$$\lim_{n\to\infty} (4n - 5) = +\infty$$

1. Después de cuántos términos podemos asegurar que $4n - 5 > 100$
2. Para un $M > 0$ arbitrario, después de cuántos términos se garantiza que $4n - 5 > M$

Solución Nosotros queremos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

1. $n_0 < n\ \Rightarrow\ 4n - 5 > 100$. En este caso tenemos que

$$\begin{aligned} 4n - 5 > 100 &\Rightarrow\ 4n > 105 \\ &\Rightarrow\ n > \frac{105}{4} \\ &\Rightarrow\ n > 26{,}2 \end{aligned}$$

Proponemos entonces un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > 26{,}2$. Por lo que después de n_0 términos podemos garantizar que $4n - 5 > 100$. En efecto pues

$$\begin{aligned} 26{,}2 < n_0 < n &\Rightarrow\ 26{,}2 < n \\ &\Rightarrow\ \frac{105}{4} < n \\ &\Rightarrow\ 105 < 4n \\ &\Rightarrow\ 100 < 4n - 5 \end{aligned}$$

2. $n_0 < n \;\Rightarrow\; 4n-5 > M$. En este caso tenemos que

$$\begin{aligned} 4n-5 > M \;&\Rightarrow\; 4n > M+5 \\ &\Rightarrow\; n > \frac{M+5}{4} \end{aligned}$$

Proponemos entonces un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \dfrac{M+5}{4}$. Para $M > 0$. Por lo que después de n_0 términos podemos garantizar que $4n-5 > M$. En efecto pues

$$\begin{aligned} \frac{M+5}{4} < n_0 < n \;&\Rightarrow\; \frac{M+5}{4} < n \\ &\Rightarrow\; M+5 < 4n \\ &\Rightarrow\; M < 4n-5 \end{aligned}$$

Ejemplo Considere el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2n}{5n+23} = +\infty$$

1. Después de cuántos términos podemos asegurar que $\dfrac{3n^2-2n}{5n+23} > 100$
2. Para un $M > 0$ arbitrario, después de cuántos términos se garantiza que $\dfrac{3n^2-2n}{5n+23} > M$

Solución Nosotros queremos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

1. $n_0 \leq n \;\Rightarrow\; \dfrac{3n^2-2n}{5n+23} > 100$. Por un lado se tiene

$$\begin{aligned} \frac{3n^2-2n}{5n+23} &> \frac{3n^2-2n}{5n+n} \quad si \quad n > 24 \\ &= \frac{3n^2-2n}{6n} \quad si \quad n > 24 \\ &= \frac{3n-2}{6} \quad si \quad n > 24 \end{aligned}$$

Por lo que necesitamos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} n_0 \leq n \;&\Rightarrow\; n \geq 24 \;\; y \;\; \frac{3n-2}{6} > 100 \\ &\Rightarrow\; n \geq 24 \;\; y \;\; 3n-2 > 600 \\ &\Rightarrow\; n \geq 24 \;\; y \;\; 3n > 602 \\ &\Rightarrow\; n \geq 24 \;\; y \;\; n > \frac{602}{3} = 200{,}6 \end{aligned}$$

Esto será satisfecho si $n \geq 201$. Por lo tanto, tome $n_0 = 201$.

2. $n_0 \leq n \;\Rightarrow\; \dfrac{3n^2-2n}{5n+23} > M$. Por un lado se tiene

$$\begin{aligned}\frac{3n^2-2n}{5n+23} &> \frac{3n^2-2n}{5n+n} \quad si \quad n > 24\\ &= \frac{3n^2-2n}{6n} \quad si \quad n > 24\\ &= \frac{3n-2}{6} \quad si \quad n > 24\end{aligned}$$

Por lo que necesitamos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}n_0 \leq n \;&\Rightarrow\; n \geq 24 \quad y \quad \frac{3n-2}{6} > M\\ &\Rightarrow\; n \geq 24 \quad y \quad 3n-2 > 6M\\ &\Rightarrow\; n \geq 24 \quad y \quad 3n > 6M+2\\ &\Rightarrow\; n \geq 24 \quad y \quad n > \frac{6M+2}{3}\end{aligned}$$

Esto será satisfecho si $n \geq 24$ y $n \geq \dfrac{6M+2}{3}$ Por lo tanto, tome

$$n_0 \geq \text{máx}\left\{24, n > \frac{6M+2}{3}\right\}$$

Ejemplo Pruebe que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-2n}{5n+23}\right) = +\infty$$

Solución Sea $M > 0$. Por la propiedad Arquimediana, $\exists\; n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_0 > \text{máx}\left\{24, n > \frac{6M+2}{3}\right\}$$

Entonces

$$\begin{aligned}n_0 \leq n \;&\Rightarrow\; n > \frac{6M+2}{3} \quad y \quad n \geq 24\\ &\Rightarrow\; 3n > 6M+2 \quad y \quad n \geq 24\\ &\Rightarrow\; 3n-2 > 6M \quad y \quad n \geq 24\\ &\Rightarrow\; \frac{3n-2}{6} > M \quad y \quad n \geq 24\\ &\Rightarrow\; \frac{3n^2-2n}{6n} > M \quad y \quad n \geq 24\\ &\Rightarrow\; \frac{3n^2-2n}{5n+23} > \frac{3n^2-2n}{6n} > M\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-2n}{5n+23}\right) = +\infty$$