Criterios básicos de convergencia de sucesiones

Definición 1. *(Sucesión Acotada) Una sucesión numerica* $\{x_n\}_{n\in\ \mathbb{N}}$ *se denomina* ***acotada*** *si el conjunto de los terminos de la sucesión* $\{x_n \mid n \in\ \mathbb{N}\}$ *en un conjunto acotado. Hay dos formas equivalentes de decir que* $\{x_n\}$ *está acotado:*

1. $\exists\ a, b \in \mathbb{R}\ \ni\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ a \leq x_n \leq b$.
2. $\exists\ \epsilon > 0\ \ni\ n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leq M$.

Ejemplo Probar que la sucesión de término general

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es acotada

Demostración. Para el término $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Usamos la expresión del **binomio de Newton**

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

donde

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\ (n-m)!}$$

Usando el desarrorollo del binomio se tiene

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\frac{n}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n} + \cdots + \frac{1}{2\cdot 3\cdots n}\left[\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{1}{n}\right] \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2\cdot 3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \frac{1}{n!}\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\right] \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\right]
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\right]$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right] \\
&\le 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \\
&< \ 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \\
&< \ 1+\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)=3
\end{aligned}
$$

por lo tanto la sucesión es acotada por 3 □

Ejemplo Probar que la sucesión de término general

$$x_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$$

es acotada

Demostración. En este caso observamos que

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{2}{n}\right)^n &= \left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2n}{2}} \\
&= \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2 \\
&= \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right]\cdot\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right] \\
&= \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]\cdot\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]
\end{aligned}
$$

La última igualdad haciendo el cambio de variable $m=\dfrac{n}{2}$. De manera que

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{2}{n}\right)^n &= \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right]\cdot\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right] \\
&= \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]\cdot\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right] \\
&< \ 3\cdot 3 = 9
\end{aligned}
$$

La última desigualdad por el ejemplo anterior cada término del producto es acotado por 3, por lo tanto la sucesión es acotada por 9 □

Ejemplo Consideremos la sucesión $\{x_n\}$ definida de la siguiente manera

$$x_1 = 1 \quad y \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}$$

Pruebe que la sucesión $\{x_n\}$ esta acotada por 2.

Solución Procedemos por inducción matemática

1. Para $n = 1$ se tiene $x_1 = 1 \leq 2$
2. Suponemos $x_k \leq 2$
3. Tenemos que

$$\begin{aligned} x_k \leq 2 \ &\Rightarrow\ x_k + 1 \leq 3 \\ &\Rightarrow\ \sqrt{x_k + 1} \leq \sqrt{3} \\ &\Rightarrow\ x_{k+1} \leq 2 \end{aligned}$$

Por el principio de inducción matemática se tiene que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ se cumple $x_n \leq 2$. Por lo tanto la sucesión esta acotada por 2

Definición 2. *(Sucesión Monotona) Una sucesión numerica $\{x_n\}_{n\in\ \mathbb{N}}$ se dice que es*

a) (Monotona Creciente) Si $\forall\, n \in\ \mathbb{N}$ se cumple $x_n \leq x_{n+1}$

b) (Monotona Decreciente) Si $\forall\, n \in\ \mathbb{N}$ se cumple $x_n \geq x_{n+1}$

c) (Monotona Estrictamente Creciente) Si $\forall\, n \in\ \mathbb{N}$ se cumple $x_n < x_{n+1}$

d) (Monotona Estrictamente Decreciente)Si $\forall\, n \in\ \mathbb{N}$ se cumple $x_n > x_{n+1}$

Ejemplo Probar que la sucesión $\{x_n\}$ de término general

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es monotona creciente

Solución Usando el desarrorollo del binomio se tiene

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\right]$$

Vamos a comparar los términos x_k y x_{k+1}, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} x_k &= \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \\ &= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)+...+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\left(1-\frac{3}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{k}\right) \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \\ &= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)+\cdots+\frac{1}{(k+1)!}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\left(1-\frac{2}{k+1}\right)\left(1-\frac{3}{k+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{k+1}\right) \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que en la expansión anterior de $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ tenemos que

I) Todos los términos son positivos;

II) Cada uno de los primeros n términos es mayor que el término correspondiente en la expansión de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

III) Hay un término más que en la expansión de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

Al poner $(i)-(iii)$ juntos, vemos que

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1}$$

Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}$ es monotona estrictamente creciente.

Ejemplo Pruebe que la sucesión $\{x_n\}$ de término general $\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$ es estrictamente creciente.

Solución En este caso

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1+\frac{2}{n}\right)^n \\
&= \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2 \\
&= \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right]\cdot\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right] \\
&= \left(1+\frac{2}{m}\right)^m\cdot\left(1+\frac{2}{m}\right)^m \quad \left(\textit{haciendo } \frac{n}{2}=m \textit{ pues si } \frac{n}{2}\to\infty \ \textit{ también } m\to\infty\right) \\
&< \left(1+\frac{2}{m+1}\right)^{m+1}\cdot\left(1+\frac{2}{m+1}\right)^{m+1} \quad \textit{ejercicio anterior} \\
&= \left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}} \quad \left(\textit{haciendo } m+1=\frac{n+1}{2} \textit{ pues si } (m+1)\to\infty \ \textit{ también } \frac{n+1}{2}\to\infty\right) \\
&= \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]^2 \\
&= \left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= x_{n+1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto la sucesión es estrictamente creciente.

Ejemplo Pruebe que la sucesión $\{x_n\}$ dada por

$$x_1 = 1 \ \ y \ \ \forall\, n\in\mathbb{N},\ x_{n+1}=\sqrt{x_n+1}$$

es creciente

Solución Procedemos por inducción matemática

1. $x_1 = 1$ y $x_2=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ por lo que $x_1\le x_2$.
2. Suponemos que $x_k\le x_{k+1}$
3. Tenemos que

$$\begin{aligned}
x_k\le x_{k+1} &\Rightarrow x_k+1\le x_{k+1}+1 \\
&\Rightarrow \sqrt{x_k+1}\le\sqrt{x_{k+1}+1} \\
&\Rightarrow x_{k+1}\le x_{k+2}
\end{aligned}$$

Por el principio de inducción matemática $\forall\ n\in\mathbb{N}$ se cumple $x_n\le x_{n+1}$ y por lo tanto la sucesión es creciente.