Criterios básicos de convergencia de sucesiones

Teorema 1. *Si* $\{x_n\}$ *es una sucesión* ***monotona*** *y* ***acotada*** *entonces* $\{x_n\}$ *es convergente.*
Es decir

a) Si $\{x_n\}$ *es una sucesión* ***monótona creciente*** *y* ***acotada superiormente****, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

b) Si $\{x_n\}$ *es una sucesión* ***monótona decreciente*** *y* ***acotada inferiormente****, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Demostración. Tenemos que

a) Supongamos $\{x_n\}$ es una sucesión acotada y monótona creciente. Ya que $\{x_n\}$ es acotada, el conjunto

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

esta acotado superiormente. Por el Axioma del supremo existe $u = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Sea $\epsilon > 0$. Por el ϵ-criterio del supremo, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$u - \epsilon < x_{n_0}$$

Como $\{x_n\}$ es monótona creciente; entonces, $n_0 \leq n \ \Rightarrow\ x_{n_0} \leq x_n$.
Por lo que

$$n_0 \leq n \ \Rightarrow\ u - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n$$

Al ser $u = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ se tiene que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ x_n \leq u$. Por lo que

$$\begin{aligned} n_0 \leq n \ &\Rightarrow\ u - \epsilon < x_n \leq u < u + \epsilon \\ &\Rightarrow\ u - \epsilon < x_n < u + \epsilon \\ &\Rightarrow\ |x_n - u| < \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = u$$

donde $u = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

b) Análoga

$\square$

Ejemplo Considére la sucesión $\{x_n\}$ definida de la siguiente manera $x_1 = 1$ y $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$. Pruebe que $\{x_n\}$ converge y encuentre su límite,

Solución Se probara que la sucesión es acotada y monótona

a) Procedemos por inducción matemática para probar que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n \leq 3$

   a) Para $n = 1$ se tiene $x_1 = 1 \leq 3$

   b) Suponemos $x_k \leq 3$

   c) Tenemos que

$$\begin{aligned} x_k \leq 3 &\Rightarrow x_k + 2 \leq 5 \\ &\Rightarrow \sqrt{x_k + 2} \leq \sqrt{5} \\ &\Rightarrow x_{k+1} \leq 3 \end{aligned}$$

   Por el principio de inducción matemática se tiene que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ se cumple $x_n \leq 3$. Por lo tanto la sucesión esta acotada por 3

b) Procedemos por inducción matemática

   a) $x_1 = 1$ y $x_2 = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$ por lo que $x_1 \leq x_2$.

   b) Suponemos que $x_k \leq x_{k+1}$

   c) Tenemos que

$$\begin{aligned} x_k \leq x_{k+1} &\Rightarrow x_k + 2 \leq x_{k+1} + 2 \\ &\Rightarrow \sqrt{x_k + 2} \leq \sqrt{x_{k+1} + 2} \\ &\Rightarrow x_{k+1} \leq x_{k+2} \end{aligned}$$

   Por el principio de inducción matemática $\forall\, n \in \mathbb{N}$ se cumple $x_n \leq x_{n+1}$ y por lo tanto la sucesión es creciente.

   Al ser $\{x_n\}$ monótona creciente y acotada se tiene por el teorema anterior que $\{x_n\}$ es convergente.

c) Para encontrar el límite de $\{x_n\}$, usamos el resultado anterior, que nos dice que $\{x_n\}$ es convergente, es decir $\exists\, L$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L$$

   Procedemos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2} &\Rightarrow (x_{n+1})^2 = x_n + 2 \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_{n+1})^2 = \lim_{n\to\infty} x_n + 2 \\ &\Rightarrow L^2 = L + 2 \\ &\Rightarrow L^2 - L - 2 = 0 \\ &\Rightarrow (L-2)(L+1) = 0 \\ &\Rightarrow L = 2 \quad o \quad L = -1 \end{aligned}$$

   como cada término de la sucesión es positivo entonces debe ocurrir que $L = 2$