Álgebra de límites de sucesiones

Teorema 1. *Suponga que las sucesiones $\{x_y\}$ y $\{y_n\}$ son sucesiones convergentes y $c \in \mathbb{R}$. Entonces*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot x_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{y_n}\right) = \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} y_n} \; \left(si \; \lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0\right)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} \; \left(si \; \lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} \; \left(si \; \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq, \; y \; \exists \; n_1 \; \ni \; n_1 \leq n \; \Rightarrow \; x_n \geq 0\right)$

Demostración. Suponga que las sucesiones $\{x_y\}$ y $\{y_n\}$ son sucesiones convergentes y $c \in \mathbb{R}$. De hecho, supongamos $x_n \to L$ y $y_n \to M$. Entonces

a) Vamos a considerar casos

I) $(c \neq 0)$: Sea $\epsilon > 0$. Como $x_n \to L$, $\exists \; n_0 \in \mathbb{N} \; \ni$

$$n_0 \leq n \;\Rightarrow\; |x_n - L| < \frac{\epsilon}{|c|}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} n_0 \leq n \;&\Rightarrow\; |c \cdot x_n - c \cdot L| = |c| \cdot |x_n - L| < |c| \cdot \frac{\epsilon}{|c|} \\ &\Rightarrow\; |c \cdot x_n - c \cdot L| < \epsilon \end{aligned}$$

II) $(c = 0)$: En este caso $c \cdot x_n = 0 \cdot x_n = 0$. Como $x_n \to L$, $\exists \; n_0 \in \mathbb{N} \; \ni$

$$n_0 \leq n \;\Rightarrow\; |0 \cdot x_n - 0 \cdot L| = |0 - 0| = 0 < \epsilon$$

Entonces,

$$\begin{aligned} n_0 \leq n \;&\Rightarrow\; |0 \cdot x_n - 0 \cdot L| = |0| \cdot |x_n - L| = 0 < \epsilon \\ &\Rightarrow\; |0 \cdot x_n - 0 \cdot L| < \epsilon \end{aligned}$$

b) Sea $\epsilon > 0$. Se tiene que

$$\begin{aligned} x_n \to L \;&\Rightarrow\; \exists \; n_1 \in \mathbb{N} \; \ni \; n_1 \leq n \;\Rightarrow\; |x_n - L| < \frac{\epsilon}{2} \\ y_n \to M \;&\Rightarrow\; \exists \; n_2 \in \mathbb{N} \; \ni \; n_2 \leq n \;\Rightarrow\; |y_n - M| < \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Entonces

$$\begin{aligned} n_0 \leq n \ &\Rightarrow \ n_1 \leq n \quad y \quad n_2 \leq n \\ &\Rightarrow \ |x_n - L| < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad |y_n - M| < \frac{\epsilon}{2} \\ &\Rightarrow \ |x_n - L| + |y_n - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \\ &\Rightarrow \ |x_n - L + y_n - M| < \epsilon \\ &\Rightarrow \ |(x_n - y_n) - (L - M)| < \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = L + M = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

c) Sea $\epsilon > 0$. Como $\{x_n\}$ es convergente, entonces es acotada; digamos que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq B$, donde $B > 0$. Tenemos que

$$\begin{aligned} x_n \to L \ &\Rightarrow \ \exists\ n_1 \in \mathbb{N} \ \ni \ n_1 \leq n \ \Rightarrow \ |x_n - L| < \frac{\epsilon}{2(|M| + 1)} \\ y_n \to M \ &\Rightarrow \ \exists\ n_2 \in \mathbb{N} \ \ni \ n_2 \leq n \ \Rightarrow \ |y_n - M| < \frac{\epsilon}{2B} \end{aligned}$$

Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Entonces

$$\begin{aligned} n_0 \leq n \ &\Rightarrow \ n_1 \leq n \quad y \quad n_2 \leq n \\ &\Rightarrow \ |x_n - L| < \frac{\epsilon}{2(|M| + 1)} \quad y \quad |y_n - M| < \frac{\epsilon}{2B} \\ &\Rightarrow \ (|M| + 1)|x_n - L| < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad B|y_n - M| < \frac{\epsilon}{2} \\ &\Rightarrow \ |M||x_n - L| < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad B|y_n - M| < \frac{\epsilon}{2} \\ &\Rightarrow \ |M||x_n - L| < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad |x_n||y_n - M| < \frac{\epsilon}{2} \\ &\Rightarrow \ |M||x_n - L| + |x_n||y_n - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \\ &\Rightarrow \ |M(x_n - L)| + |x_n(y_n - M)| < \epsilon \\ &\Rightarrow \ |M(x_n - L) + x_n(y_n - M)| < \epsilon \\ &\Rightarrow \ |x_n y_n - ML + Mx_n - Mx_n| < \epsilon \\ &\Rightarrow \ |x_n y_n - ML| < \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = L \cdot M = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

d) Probaremos antes un resultado

Teorema 2. ***(Acotación desde 0)*** *Si una sucesión converge a un número distinto de cero, entonces está acotada desde 0. Más precisamente, si $x_n \to L \neq 0$ y C es un número entre 0 y $|L|$, entonces la sucesión x_n está acotada desde 0 por C. Es decir*

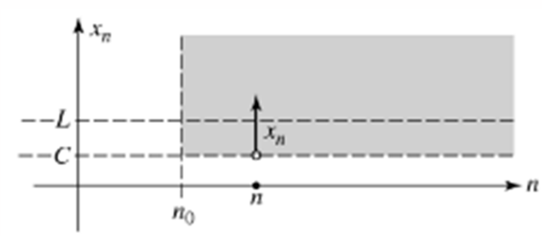
a) *Si $0 < C < L$, entonces $\exists\ n_0 \in \mathbb{N} \ \ni \ n_0 \leq n \ \Rightarrow \ C < x_n$.*

b) *Si $L < C < 0$, entonces $\exists\ n_0 \in \mathbb{N} \ \ni \ n_0 \leq n \ \Rightarrow \ C > x_n$.*

Demostración. Supongamos que $x_n \to L \neq 0$. Entonces $|x_n| \to |L| \neq 0$.
Supongamos que $0 < C < |L|$. Entonces $|L| - C > 0$ y tomamos $\epsilon = |L| - C$, por lo que si $|x_n| \to |L| \neq 0$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N} \ \ni$

$$\begin{aligned} n_0 \leq n \ &\Rightarrow \ ||x_n| - |L|| < |L| - C \\ &\Rightarrow \ C - |L| < |x_n| - |L| < |L| - C \\ &\Rightarrow \ C < |x_n| < 2|L| - C \\ &\Rightarrow \ C < |x_n| \\ &\Rightarrow \ x_n > C \ \ si \ \ 0 < C < L, \ \ y \ \ x_n < C \ si \ L < C < 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\{x_n\}$ esta acotada desde cero (por C)



□

Regresando al teorema. Sea $\epsilon > 0$. Si $y_n \to M \neq 0$, $\{y_n\}$ es **acotada cercana a cero** por lo que

$$\exists\ n_1 \in \mathbb{N} \ \ni \ n_1 \leq n \ \Rightarrow \ \frac{|M|}{2} < |y_n|$$

Además como $y_n \to M$

$$\exists\ n_2 \in \mathbb{N} \ \ni \ n_2 \leq n \ \Rightarrow \ |y_n - M| < \frac{\epsilon |M|^2}{2}$$

Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
n_0 \leq n \;&\Rightarrow\; n_1 \leq n \;\; y \;\; n_2 \leq n \\
&\Rightarrow\; \frac{|M|}{2} < |y_n| \quad y \quad |y_n - M| < \frac{\epsilon|M|^2}{2} \\
&\Rightarrow\; \frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|M|} \quad y \quad |y_n - M| < \frac{\epsilon|M|^2}{2} \\
&\Rightarrow\; \frac{|y_n - M|}{|y_n||M|} = \frac{1}{|y_n|}\frac{|y_n - M|}{|M|} < \frac{2}{|M|}\frac{\epsilon|M|^2}{2} \\
&\Rightarrow\; \left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{M - y_n}{y_n M}\right| = \frac{|y_n - M|}{|y_n||M|} < \epsilon \\
&\Rightarrow\; \left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{M}\right| < \epsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{y_n}\right) = \frac{1}{M} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} y_n}$$

e) Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_y \geq 0$ y $\exists\; n_1 \in \mathbb{N} \;\ni\; n_1 \leq n \;\Rightarrow\; x_n \geq 0$. Sea $\epsilon > 0$.

a) Caso (L=0): Entonces $\exists\; n_2 \in \mathbb{N} \;\ni\; n_2 \leq n \;\Rightarrow\; |x_n - 0| < \epsilon^2$. Tomamos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
n_0 \leq n \;&\Rightarrow\; 0 \leq x_n < \epsilon^2 \\
&\Rightarrow\; \sqrt{x_n} < \epsilon \\
&\Rightarrow\; |\sqrt{x_n} - 0| < \epsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \frac{1}{M} = \sqrt{L}$$

b) Caso (L>0): Como $x_n \to L$. Entonces $\exists\; n_2 \in \mathbb{N} \;\ni\; n_2 \leq n \;\Rightarrow\; |x_n - L| < \epsilon\sqrt{L}$. Tomamos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
n_0 \leq n \;&\Rightarrow\; |\sqrt{x_n} - \sqrt{L}| = \frac{|x_n - L|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{L}} \\
&\Rightarrow\; < \;\frac{|x_n - L|}{\sqrt{L}} \\
&\Rightarrow\; < \;\frac{\epsilon\sqrt{L}}{\sqrt{L}} = \epsilon
\end{aligned}$$

Esto es

$$n_0 \leq n \;\Rightarrow\; |\sqrt{x_n} - \sqrt{L}| < \epsilon$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{L} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} x_n}$$

□

Teorema 3. ***(Límites fundamentales)*** $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Entonces $\frac{1}{\epsilon} > 0$. Por la propiedad arquimediana, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ni n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Entonces

$$\begin{aligned} n_0 \leq n &\Rightarrow \frac{1}{\epsilon} < n \\ &\Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \epsilon \\ &\Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ □

Ejemplo Use el álgebra de límites para probar que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{3n-7}\right) = \frac{2}{3}$

Solución En este caso

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{3n-7}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{3}{n}}{3-\frac{7}{n}}\right) \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{7}{n}\right)} \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}}{\lim_{n\to\infty} 3 - \lim_{n\to\infty}\frac{7}{n}} \\ &= \frac{2 + \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}}{3 - \lim_{n\to\infty}\frac{7}{n}} \\ &= \frac{2 + 3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{3 - 7\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} \\ &= \frac{2+0}{3-0} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Definición 1. ***(Número e)***

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Ejemplo Use el álgebra de límites para probar que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{e}$

Solución En este caso

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Ejemplo Use el álgebra de límites para probar que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$

Solución En este caso

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{1}{e} \\
&= e^{-1}
\end{aligned}$$