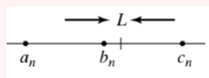
Desigualdades y límites de sucesiones

El siguiente teorema y corolario proporcionan dos herramientas muy útiles para probar que las sucesiones convergen en un límite L. Usted se encontrará utilizando estas herramientas, especialmente la segunda, con bastante frecuencia.

Teorema 1. ***(Primer principio de compresión)***
Si $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *y* $\{c_n\}$ *son sucesiones tales que* $a_n \to L$, $c_n \to L$ *y* $\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n \leq c_n$, *entonces* $b_n \to L$



Demostración. Supongamos que $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ son sucesiones convergentes tal que $a_n \to L$, $c_n \to L$ y $\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n \leq c_n$. Sea $\epsilon > 0$

$$\begin{array}{c} Si\ a_n \to L,\ \exists\ n_1 \in \mathbb{N}\ \ni\ n_1 \leq n\ \Rightarrow\ |a_n - L| < \epsilon \\ Si\ c_n \to L,\ \exists\ n_2 \in \mathbb{N}\ \ni\ n_2 \leq n\ \Rightarrow\ |c_n - L| < \epsilon \end{array}$$

Sea $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$. Entonces

$$\begin{aligned} n_0 \leq n &\Rightarrow\ n_1 \leq n \quad y \quad n_2 \leq n \\ &\Rightarrow\ |a_n - L| < \epsilon \quad y \quad |c_n - L| < \epsilon \\ &\Rightarrow\ -\epsilon < a_n - L < \epsilon \quad y \quad -\epsilon < c_n - L < \epsilon \\ &\Rightarrow\ L - \epsilon < a_n < L + \epsilon \quad y \quad L - \epsilon < c_n < L + \epsilon \\ &\Rightarrow\ L - \epsilon < a_n < L \quad y \quad c_n < L + \epsilon \\ &\Rightarrow\ L - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \epsilon \\ &\Rightarrow\ L - \epsilon < b_n < L + \epsilon \\ &\Rightarrow\ |b_n - L| < \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $b_n \to L$ □

Corolario 1. ***(Segundo principio de compresión.)*** *Si* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *son sucesiones tal que* $b_n \to 0$ *y*

$$\exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \ni\ n_0 \leq n\ \Rightarrow\ |a_n - L| \leq b_n$$

entonces $a_n \to L$

Demostración. Aplicando el primer principio de compresión con $a_n = 0$, $b_n = |a_n - L|$ y $c_n = |b_n|$ □

Ejemplo Use el segundo principio de compresión para probar que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{3n-7}\right)=\frac{2}{3}$$

Solución En este caso se tiene

$$\begin{aligned}\forall\ n\in\mathbb{N},\qquad \left|\frac{2n+3}{3n-7}-\frac{2}{3}\right| &= \left|\frac{3(2n+3)-2(3n-7)}{3(3n-7)}\right|\\ &= \left|\frac{6n+9-6n+14}{3(3n-7)}\right|\\ &= \frac{23}{|9n-21|}\\ &= \frac{23}{9n-21}\quad si\quad n\geq 3\\ &< \frac{23}{9n-n}\quad si\quad n\geq 22\\ &< \frac{24}{8n}=\frac{3}{n}\quad si\quad n\geq 22\end{aligned}$$

Ahora bien $\frac{3}{n}\to 0$. Por el principio de compresión (corolario) con $a_n=\frac{2n+3}{3n-7}$, $L=\frac{2}{3}$, $b_n=\frac{3}{n}$ y $n_0=22$ tenemos que

$$\frac{2n+3}{3n-7}\to\frac{2}{3}$$

Ejemplo Use el segundo principio de compresión para probar que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-4n}{n^2+5}\right)=3$$

Solución En este caso se tiene

$$\begin{aligned}\forall\ n\in\mathbb{N},\qquad \left|\frac{3n^2-4n}{n^2+5}-3\right| &= \left|\frac{(3n^2-4n)-3(n^2+5)}{n^2+5}\right|\\ &= \left|\frac{-4n-15}{n^2+5}\right|\\ &= \frac{4n+15}{n^2+5}\\ &< \frac{4n+n}{n^2}\quad si\quad n\geq 15\\ &= \frac{5n}{n^2}=\frac{5}{n}\end{aligned}$$

Ahora bien $\frac{5}{n}\to 0$. Por el segundo principio de compresión con $a_n=\frac{3n^2-4n}{n^2+5}$, $L=3$, $b_n=\frac{5}{n}$ y $n_0=15$ tenemos que

$$\frac{3n^2-4n}{n^2+5}\to 3$$