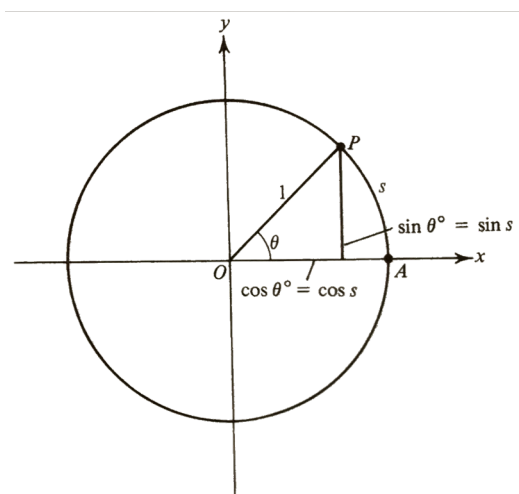


Funciones Trigonómicas

Definición 1. Dado un círculo de radio 1 y un punto P sobre el círculo a un ángulo θ , definimos



$$\cos \theta = \text{Abcisa de } P$$

$$\text{sen } \theta = \text{Ordenada de } P$$

Si S es el mismo ángulo medido en radianes y $|S|$ es la longitud del arco \widehat{AP} entonces

$$\cos S = \text{Abcisa de } P$$

$$\text{sen } S = \text{Ordenada de } P$$

La relación entre ángulos y radianes la podemos escribir en términos de las funciones

$$f(x) = g\left(\frac{2\pi x}{360}\right), \quad g(x) = f\left(\frac{360x}{2\pi}\right)$$

Ejemplo Tenemos que para un ángulo de 90° se tiene

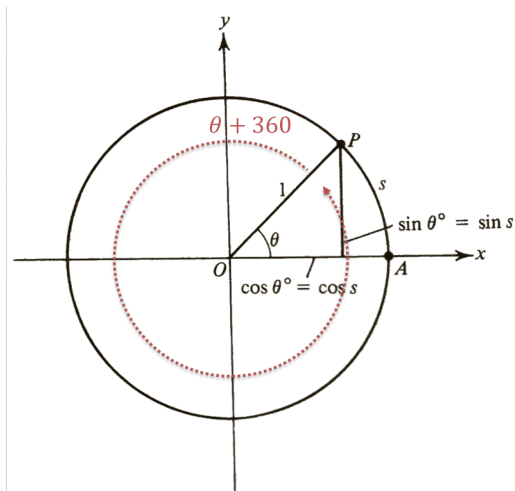
$$f(90) = \frac{2\pi(90)}{360} = \frac{\pi 180}{360} = \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo Tenemos que para un ángulo de $\frac{\pi}{2}$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{360\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\pi} = \frac{360(\pi)}{4\pi} = 90$$

(1) Dado que $\theta = \theta + 360$ se tiene entonces que

$$\cos(x + 360) = \cos(x) \quad y \quad \text{sen}(x + 360) = \text{sen}(x), \quad \forall x$$



consecuentemente $\cos \theta$ y $\text{sen } \theta$ son funciones periódicas

(2) Por definición $\cos \theta = \text{Abcisa de } P$ y como $-1 \leq \text{Abcisa de } P \leq 1$ entonces

$$|\cos \theta| \leq 1$$

Por definición $\text{sen } \theta = \text{Ordenada de } P$ y como $-1 \leq \text{Ordenada de } P \leq 1$ entonces

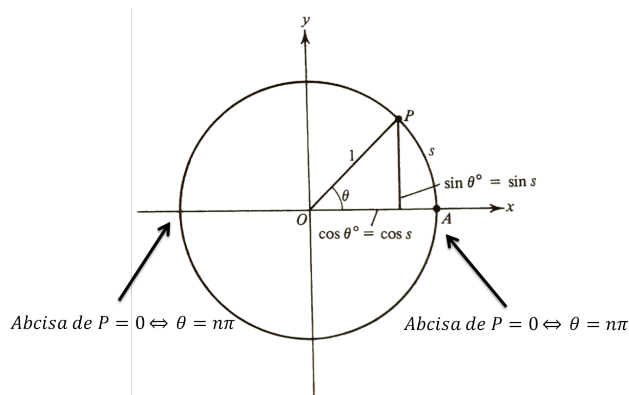
$$|\text{sen } \theta| \leq 1$$

(3) Se tiene que

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad y \quad \text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x), \quad \forall x$$

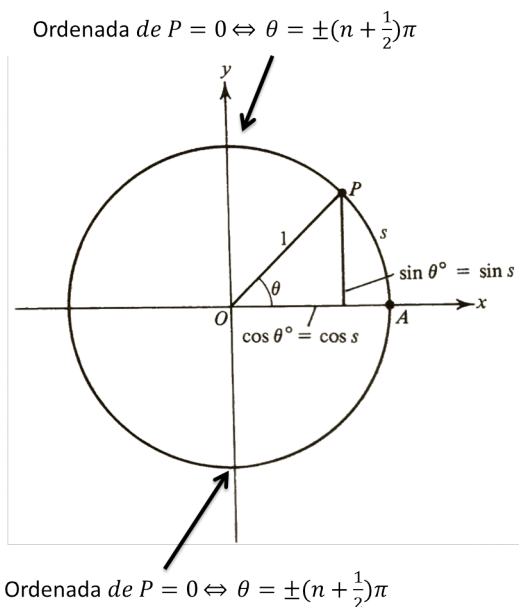
(4) Por definición $\cos \theta = \text{Abcisa de } P$ se tiene entonces

$$\cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \pm\pi$$



(5) Por definición $\text{sen } \theta = \text{Ordenada de } P$ se tiene entonces

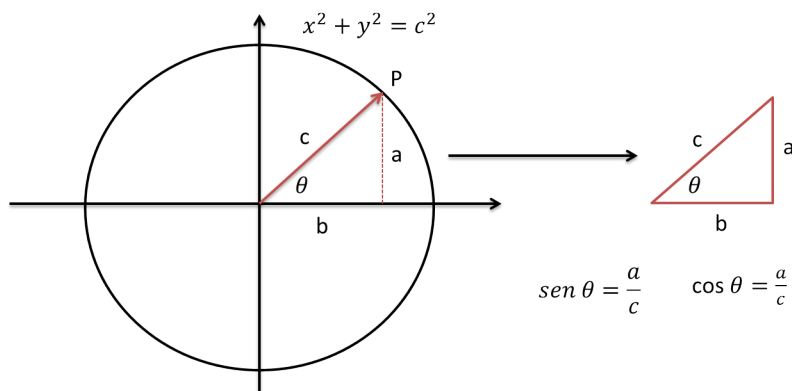
$$\text{sen } \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{2}$$



(6) Definimos

$$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}, \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \csc \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta}, \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta}$$

(7) Si tenemos un círculo de radio c entonces

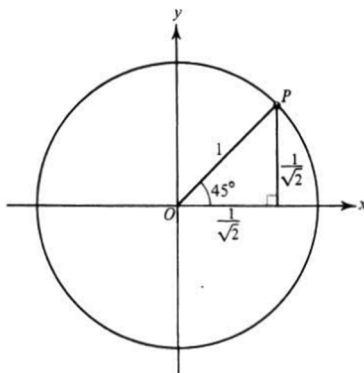


$$b^2 + a^2 = c^2 \Rightarrow \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 1$$

por definición

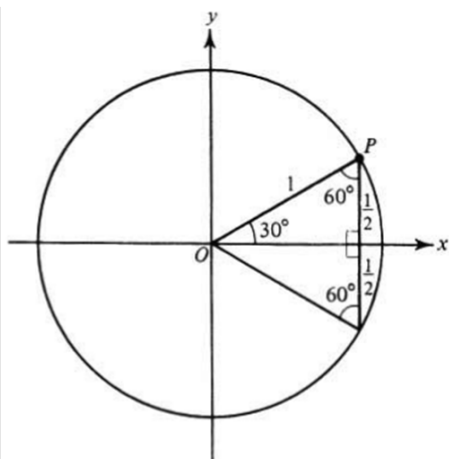
$$\cos \theta = \frac{b}{c} \text{ y } \operatorname{sen} \theta = \frac{a}{c} \Rightarrow c \cos \theta = b \text{ y } c \operatorname{sen} \theta = a$$

Ejemplo Vamos a calcular los valores de 45, en este caso se tiene



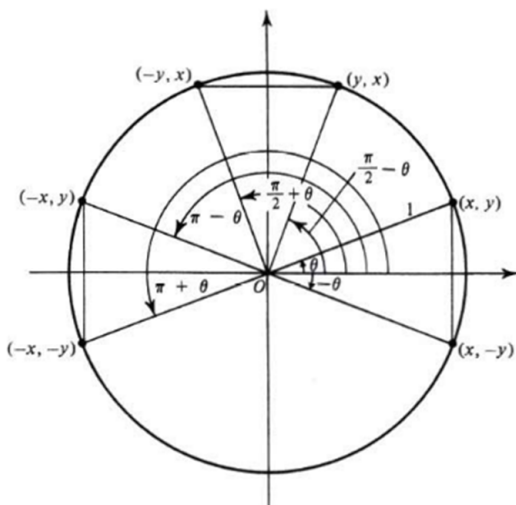
$$a = b = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ y } c = 1 \Rightarrow \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \operatorname{sen} 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tan 45 = 1, \cot 45 = 1, \sec 45 = \sqrt{2}, \operatorname{csc} 45 = \sqrt{2}$$

Ejemplo Según la figura, se tiene la tabla de ángulos



θ	0° or 0 radians	30° or $\frac{\pi}{6}$ radians	45° or $\frac{\pi}{4}$ radians	60° or $\frac{\pi}{3}$ radians	90° or $\frac{\pi}{2}$ radians
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\cot \theta$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec \theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	—
$\operatorname{csc} \theta$	—	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

Ejercicio Según la figura



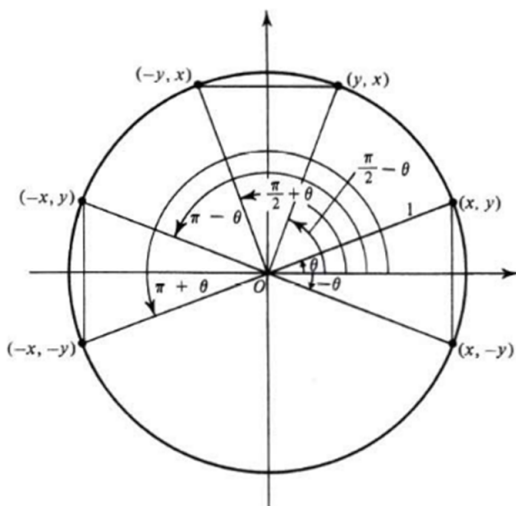
Para $P = (x, y)$ se tiene que el ángulo es θ por lo que

$$\cos \theta = x, \quad y = \sin \theta$$

Para el $P = (y, x)$ se tiene que el ángulo es $\frac{\pi}{2} - \theta$ por lo que

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = y \Rightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = x \Rightarrow \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta$$



Para $P = (-y, x)$ se tiene que el ángulo es $\frac{\pi}{2} + \theta$ por lo que

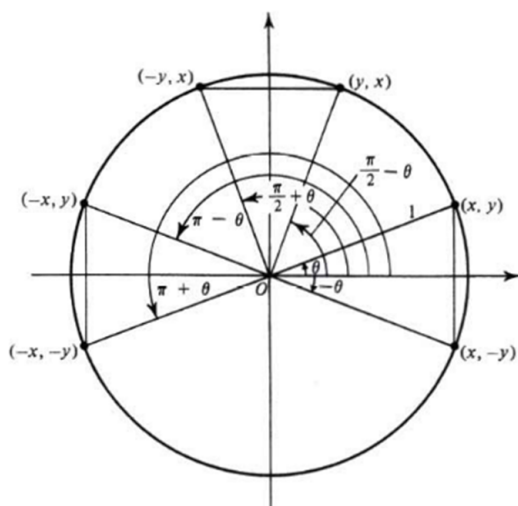
$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = -y \Rightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = -\sin \theta$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = x \Rightarrow \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = \cos \theta$$

Para $P = (-x, y)$ se tiene que el ángulo es $\pi - \theta$ por lo que

$$\cos (\pi - \theta) = -x \Rightarrow \cos (\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$\sin (\pi - \theta) = y \Rightarrow \sin (\pi - \theta) = \sin \theta$$



Para $P = (-x, -y)$ se tiene que el ángulo es $\pi + \theta$ por lo que

$$\cos(\pi + \theta) = -x \Rightarrow \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$\operatorname{sen}(\pi + \theta) = -y \Rightarrow \operatorname{sen}(\pi + \theta) = -\operatorname{sen} \theta$$

Para $P = (x, -y)$ se tiene que el ángulo es $\pi - \theta$ por lo que

$$\cos(-\theta) = x \Rightarrow \cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -y \Rightarrow \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen} \theta$$

de esto último podemos decir que $\cos \theta$ es una función par

de esto último podemos decir que $\operatorname{sen} \theta$ es una función impar

Podemos encontrar ahora el valor de las siguientes funciones trigonométricas

$$\tan(-\theta) = \frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{\cos(-\theta)} = -\frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$$

$$\cot(-\theta) = \frac{\cos(-\theta)}{\operatorname{sen}(-\theta)} = -\frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} = -\cot \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \cot \theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

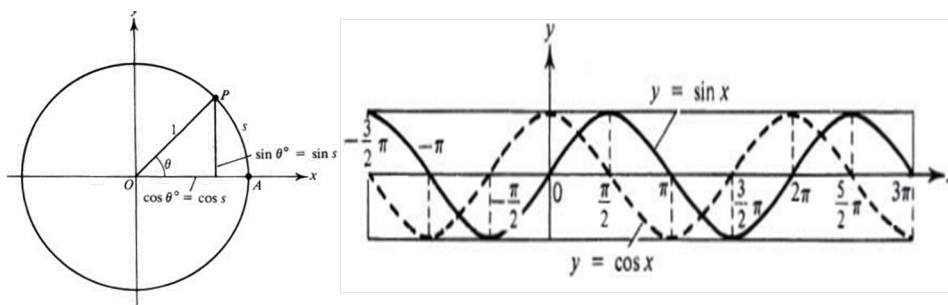
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{\cos \theta}{-\operatorname{sen} \theta} = -\cot \theta$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = \frac{-\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$$

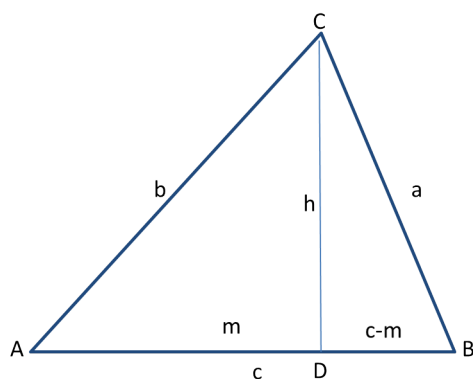
$$\tan(\pi - \theta) = \frac{\operatorname{sen}(\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta)} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{-\cos \theta} = -\tan \theta$$

$$\cot(\pi - \theta) = \frac{\cos(\pi - \theta)}{\operatorname{sen}(\pi - \theta)} = \frac{-\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} = -\cot \theta$$

Gráfica de las funciones $\sin(x)$, $\cos(x)$ En este caso



Teorema Generalizado de Pitágoras



Dado un triángulo ABC trazamos la altura CD y formamos dos triángulo rectángulos
Para el triángulo CDB se tiene

$$a^2 = (c - m)^2 + h^2 = c^2 - 2cm + m^2 + h^2$$

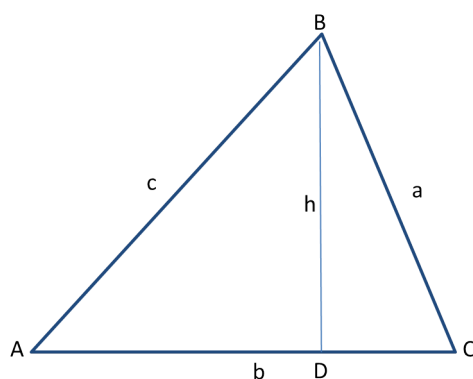
Para el triángulo ADC se tiene

$$b^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow b^2 - m^2 = h^2$$

por lo tanto

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cm$$

Ley de Cosenos



Dado un triángulo ABC trazamos la altura BD
Según el teorema generalizado de pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bAD$$

Por otro lado se tiene

$$\cos A = \frac{AD}{c} \Rightarrow c \cos A = AD$$

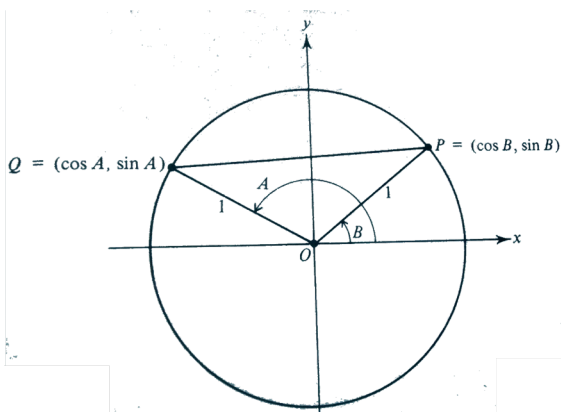
por lo tanto

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Procediendo análogamente se tiene

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



Según la figura por la fórmula de la distancia

$$|PQ|^2 = (\cos A - \cos B)^2 + (\sin A - \sin B)^2$$

Si en la fórmula anterior sustituimos B por $-B$ se tiene

$$\cos(A + B) = \cos(A - (-B)) = \cos(-B) \cos A + \sin A \sin(-B) = \cos B \cos A - \sin A \sin B$$

Si en la fórmula anterior sustituimos B por $B + \frac{\pi}{2}$

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$= \cos^2 A - 2 \cos A \cos B + \sin^2 A - 2 \sin A \sin B + \cos^2 B + \sin^2 B$$

$$= 2 - 2(\cos B \cos A + \sin A \sin B)$$

Ahora según la ley de cosenos

$$|PQ|^2 = 2 - 2 \cos(A - B)$$

por lo tanto

$$2 - 2 \cos(A - B) = 2 - 2(\cos B \cos A + \sin A \sin B)$$

simplificando

$$\cos(A - B) = \cos B \cos A + \sin A \sin B$$