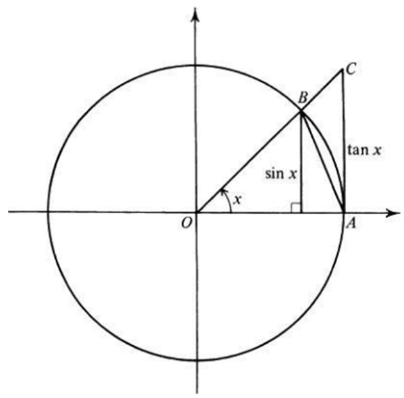
Ejercicio Demostrar la desigualdad

$$\cos(x) \;<\; \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \;<\; 1$$

para valores $0 \;<\; |x| \;<\; \dfrac{\pi}{2}$

Solución Consideremos la siguiente figura



Tenemos entonces que

$$Area(\triangle\ OAB) \;<\; Area_{sector\ OAB} \;<\; Area(\triangle\ OAC)$$

Si $0 \;<\; |x| \;<\; \dfrac{\pi}{2}$, entonces

$$\frac{\sin\ x}{2} \;<\; \frac{x}{2} \;<\; \frac{\tan\ x}{2}$$

de donde

$$\operatorname{sen}\ x \;<\; x \;<\; \tan\ x$$

Dividiendo por $\sin\ x$ obtenemos

$$1 \;<\; \frac{x}{\sin\ x} \;<\; \frac{1}{\cos\ x}$$

de donde

$$1 \;<\; \frac{x}{\sin\ x} \;\Rightarrow\; \frac{\sin\ x}{x} \;<\; 1$$

y también

$$x \;<\; \tan\ x \;\Rightarrow\; x \;<\; \frac{\sin\ x}{\cos\ x} \;\Rightarrow\; \cos\ x \;<\; \frac{\sin\ x}{x}$$

Ejercicio Demuestra que una función f es periódica con periódo a satisface

$$f(x+na) = f(x)$$

para todo entero n

Solución Para $n = 0$ y $n = 1$ no hay nada que probar. Veamos que ocurre si $n = -1$, en este caso

$$f(x) = f(x - a + a) = f(x - a)$$

Más generalmente, si $n > 0$ entonces

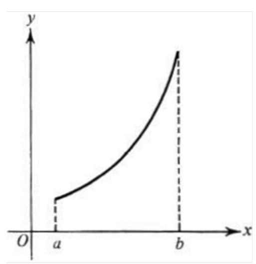
$$f(x + na) = f(x + (n - 1)a + a) = f(x + (n - 1)a) = \cdots = f(x + a) = f(x)$$

también

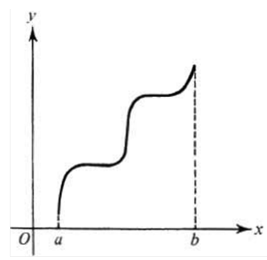
$$f(x - na) = f(x - (n - 1)a - a) = f(x - (n - 1)a) = \cdots = f(x - a) = f(x)$$

Definición 1. *Se dice que una función f definida en un intervalo I es creciente en I si $x < x'$ implica $f(x) < f(x')$ para cada par de puntos x y x' en I. Si $x < x'$ implica $f(x) \leq f(x')$, con $\leq$ en lugar de $<$, entonces se dice que $f(x)$ no disminuye en I. Por lo tanto, si f aumenta en I, su gráfica aumenta de manera constante en I.*

Por otro lado, si f no disminuye en I, su gráfica nunca cae en I pero puede haber intervalos en la que el gráfico se reduce a un segmento de línea horizontal. Por ejemplo, cada de las funciones que se muestran en las Figuras se tiene que f no disminuye en [a, b], pero solo el que se muestra en la figura está aumentando en [a, b].



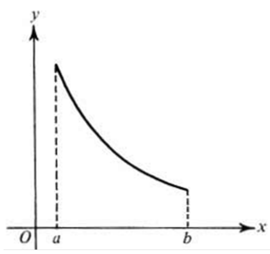
Estrictamente creciente



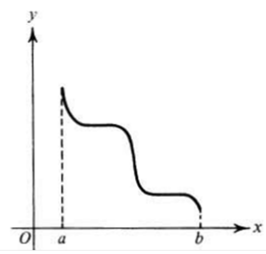
Creciente

Definición 2. *Se dice que una función f definida en un intervalo I es decreciente en I si $x < x'$ implica $f(x) > f(x')$ para cada par de puntos x y x' en I. Si $x < x'$ implica $f(x) \geq f(x')$, con $\geq$ en lugar de $>$, entonces se dice que $f(x)$ no aumenta en I.*

Por lo tanto, si f está disminuyendo en I, su gráfica cae constantemente en I. Por otro lado, si f no aumenta en I, su gráfica nunca sube en I pero puede tener intervalos de constancia. Por ejemplo, cada una de las funciones que se muestran en las Figuras no se tienen pliegues en [a, b] pero solo el que se muestra en la Figura está disminuyendo en [a, b].



Estrictamente Decreciente



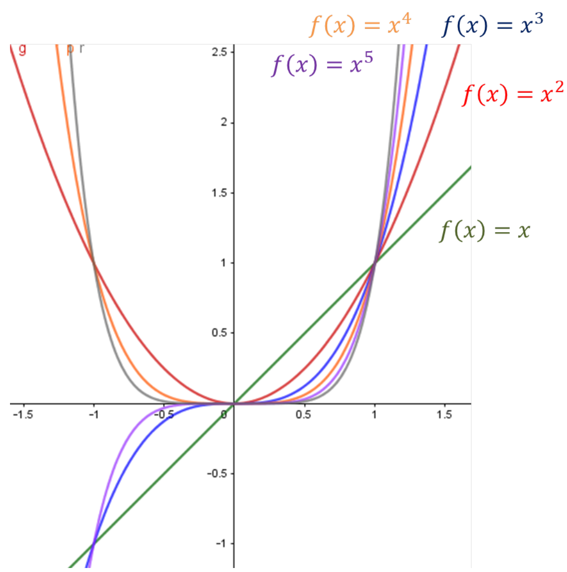
Decreciente

Definición 3. *Una función que está creciendo, decreciendo, no aumentando o no disminuyendo en un intervalo I se dice que es **monótona** en I.*

Funciones Potenciales

Definición 4. *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma $f(x) = x^p$ con $p \in \mathbb{Z}$ se llama función potencial*

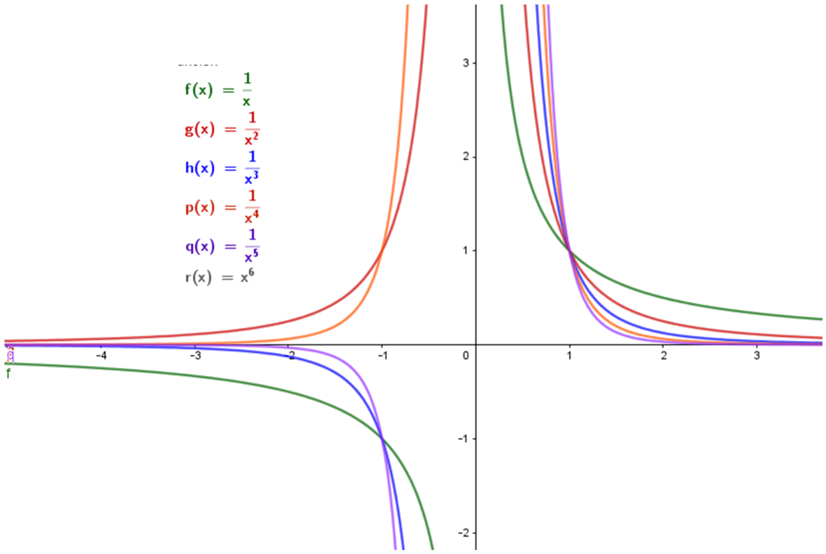
Caso $p \in \mathbb{N}$. En este caso la gráfica de la función $f(x) = x^p$ se comporta como se ve en la figura



Estas funciones son monotonas crecientes en el intervalo $[0, +\infty)$.
En efecto se tiene

$$\begin{aligned} x < x_1 \Rightarrow \; & x^n < x_1^n \\ \Rightarrow \; & f(x) < f(x_1) \end{aligned}$$

Caso $p < 0$**.** En este caso si $p > 0$, entonces $p = -n$ y se tiene $x^p = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n},\ x \neq 0$. Y la gráfica de la función $f(x) = x^p$ se comporta como se ve en la figura



Estas funciones son monotonas decrecientes en el intervalo $[0. + \infty)$.
En efecto se tiene

$$\begin{aligned} x < x_1 \Rightarrow \ & x^n < x_1^n \\ \Rightarrow \ & \frac{1}{x_1^n} < \frac{1}{x^n} \\ \Rightarrow \ & f(x) > f(x_1) \end{aligned}$$