Sea $f : X \to Y$ una función y sea $A \subseteq X$. Las imagenes de todos los elementos de A determinan un subconjunto de Y llamado imagen de A por f.

Definición 1. *La imagen del subconjunto $A \subseteq Y$ es el conjunto cuyos elementos son las imagenes de los elementos de A.*

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

Ejemplo Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^2 + 3$$

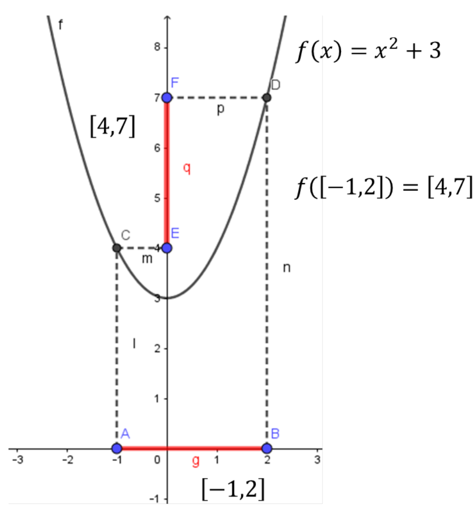
Sea $A = [-1, 2] \subset \mathbb{R}$, queremos hallar $f(A)$.

Solución Tenemos que

$$\begin{aligned} f(A) &= f([-1,2]) \\ &= \{f(x) \mid x \in [-1,2]\} \\ &= \{y = x^2 + 3 \mid x \in [-1,2]\} \\ &= \{\sqrt{y-3} = x \mid x \in [-1,2]\} \end{aligned}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} x \in [-1,2] \ &\Rightarrow \ \sqrt{y-3} \in [-1,2] \\ &\Rightarrow \ -1 \ \leq \ \sqrt{y-3} \ \leq \ 2 \\ &\Rightarrow \ 1 \ \leq \ y-3 \ \leq \ 4 \\ &\Rightarrow \ 4 \ \leq \ y \ \leq \ 7 \\ y &\in [4,7] \end{aligned}$$



Ejemplo Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^2 + 3$$

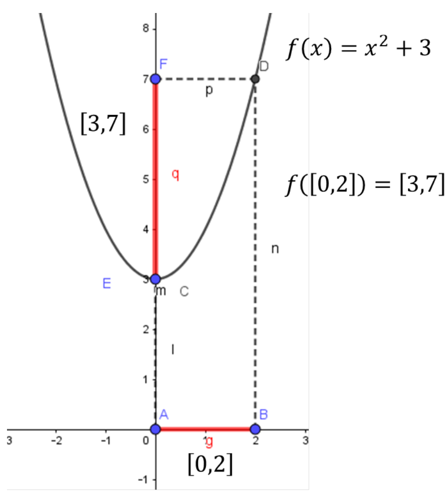
Sea $A = [0, 2] \subset \mathbb{R}$, queremos hallar $f(A)$.

Solución Tenemos que

$$\begin{aligned} f(A) &= f([0, 2]) \\ &= \{f(x) \mid x \in [0, 2]\} \\ &= \{y = x^2 + 3 \mid x \in [0, 2]\} \\ &= \{\sqrt{y - 3} = x \mid x \in [0, 2]\} \end{aligned}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} x \in [0, 2] \;&\Rightarrow\; \sqrt{y-3} \in [0, 2] \\ &\Rightarrow\; -0 \;\leq\; \sqrt{y-3} \;\leq\; 2 \\ &\Rightarrow\; 0 \;\leq\; y - 3 \;\leq\; 4 \\ &\Rightarrow\; 3 \;\leq\; y \;\leq\; 7 \\ y \in [3, 7] \end{aligned}$$

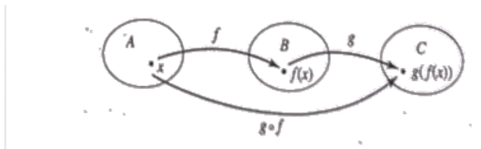


Composición de funciones

Definición 2. *Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ supongamos que $\mathfrak{R}(f) \subset \mathfrak{D}(g)$ entonces $h : A \to C$ es la función compuesta $h = g \circ f$ se define*

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g\,(f(x)) \quad \forall x \in A, \quad y \quad \mathfrak{R}(f) \subset \mathfrak{D}(g)$$

El siguiente diagrama esquemático puede ser útil para dar una comprensión intuitiva de $g \circ f = g(f(x))$



Observación: Tenga en cuenta la inversión de orientación en el dibujo esquemático, la función f se dibuja a la izquierda de g, pero en la notación de función compuesta $g \circ f$, g se escribe a la izquierda de f. Cuando la función compuesta $g \circ f$ opera en el elemento x, f opera primero y luego g opera en el resultado, a pesar de que cuando escribimos $g \circ f$ escribimos g primero. Se debe tener cuidado para evitar confusiones.

Ejemplo Considerese las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ y $g(x) = 2x - 3$. Calcular $f \circ g\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $g \circ f(3)$

Solución En este caso se tiene

$$f \circ g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(2\left(\frac{1}{2}\right) - 3\right) = f(-2) = \frac{1}{-2-1} = -\frac{1}{3}$$

$$g \circ f(3) = g(f(3)) = g\left(\frac{1}{3-1}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = -2$$

Ejemplo Considerese las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ y $g(x) = 2x - 3$. Obtener las reglas de correspondencia para $f \circ g(x)$, $g \circ f(x)$

Solución En este caso se tiene

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x-3) = \frac{1}{2x-3-1} = \frac{1}{2x-4}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x-1}\right) = 2\left(\frac{1}{x-1}\right) - 3 = \frac{2}{x-1} - 3 = \frac{2-3(x-1)}{x-1} = \frac{5-3x}{x-1}$$

Observación: En el ejemplo anterior, podemos notar que en general

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Ejemplo Si f es una función par y g es una función par se tiene

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) \underbrace{=}_{f(x)=f(-x)} g(f(x)) = g \circ f(x)$$

por lo tanto $g \circ f(x)$ es una función par

Ejemplo Si f es una función impar y g es una función impar se tiene

$$g \circ f(-x) = g(f(-x)) \underbrace{=}_{f(-x)=-f(x)} g(-f(x)) \underbrace{=}_{-g(x)=g(-x)} -g(f(x)) = -g \circ f(x)$$

por lo tanto $g \circ f(x)$ es una función impar

Definición 3. *Una función $f : A \to B$ es uno-uno (inyectiva) si $\forall\ a, a' \in A$, se cumple*

$$f(a) = f(a') \ \Rightarrow \ a = a'$$

Equivalentemente

$$a \neq a' \ \Rightarrow \ f(a) \neq f(a')$$

Definición 4. *Una función $f : A \to B$ es suprayectiva (sobreyectiva) en B si $R(f) = B$, Esto es si se cumple*

$$\forall\ b \in B,\ \exists\ a \in A \ \ni \ f(a) = b$$

Ejemplo La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ satisface

1. No es uno-uno pues $1 \neq -1$ pero $f(1) = 1 = f(-1)$
2. No es suprayectiva pues,

$$R(f) = [0, +\infty) \neq \mathbb{R}$$

Ejemplo La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ satisface

1. Uno-uno pues

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Rightarrow a^3 = b^3 \\ &\Rightarrow a^3 - b^3 \\ &\Rightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) = 0 \\ &\Rightarrow a - b = 0, \ \ pues \ \ a^2 + ab + b^2 \ \ (si\ b \neq 0) \\ &\Rightarrow a = b \end{aligned}$$

La función cuadrática $f(a) = a^2 + ab + b^2$ tiene un discriminante $D = b^2 - 4(1)(b^2) = -3b^2 < 0$ es negativo y por lo tanto no es un número real.

2. Es suprayectiva pues $\forall\ x \in \mathbb{R}$ existe $\sqrt[3]{x} \in \mathbb{R}$ y

$$f(\sqrt[3]{x}) = x, \quad x \in R(f)$$

Teorema 1. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones inyectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ es inyectiva*

Demostración. sean $x_1, x_2 \in Dom_f$ tal que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ se tiene entonces que

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

como g es inyectiva se tiene que $f(x_1) = f(x_2)$ y como f es inyectiva entonces $x_1 = x_2 \therefore g \circ f$ es inyectiva □

Teorema 2. *Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones suprayectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ es suprayectiva*

Demostración. Hay que probar que $\forall z \in C\ \exists x \in A$ tal que $g \circ f(x) = z$, se tiene que por ser $g : B \to C$ sobre $\exists y \in B$ tal que $\forall z \in C\ g(y) = z$ dado que f es suprayectiva y $y \in B\ \exists x \in A$ tal que $f(x) = y$ por lo tanto $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. Por lo tanto dado $z \in C\ \exists x \in A$ tal que $g \circ f(x) = z$ □

Propiedades de la Composición de Funciones

Propiedad Asociativa Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ entonces $h : A \to D$. Entonces se verfica

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Comprobación Tenemos que

$$\begin{aligned}[(h \circ g) \circ f](x) &= (h \circ g)\,(f(x)) \\ &= h\,(g(f(x))) \\ &= h\,((g \circ f)(x)) \\ &= (h \circ (g \circ f))\,(x)\end{aligned}$$

por lo tanto

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Definición 5. *Sea A un conjunto arbitrario. La función identidad en A es la función $i_A : A \to A$ definida por la regla*

$$\forall\ x \in A,\ \ i_A(x) = x$$

Teorema 3. *Sean A,B conjuntos arbitrarios. La función identidad en A, $i_A : A \to A$, satisface las siguientes reglas*

a) $\forall\ f : A \to B,\ f \circ i_A = f$

b) $\forall\ g : B \to A,\ i_A \circ g = g$

Demostración. Tenemos que

a) Suponga que existe $g : B \to C$ tal que $g \circ f$ es uno-uno. Sea $a \neq a' \in A$. Como $g \circ f$ es uno-uno

$$(g \circ f)(a) \neq (g \circ f)(a')$$
$$g(f(a)) \neq g(f(a'))$$

debe ocurrir entonces que $f(a) \neq f(a')$. Por lo tanto f es uno-uno

b) Supongamos que existe $h : D \to A$ tal que $f \circ h$ es suprayectiva en B. Sea $b \in B$. Como $f \circ h$ es suprayectiva en B, existe $d \in D$ tal que $f \circ h(d) = b$. Sea $a = h(d)$. Por lo que $a \in A$ y

$$f(a) = f(h(d)) = b$$

Esto es $\forall\ b \in B$, $b \in R(f)$. Por lo tanto f es suprayectiva en B.

□

Definición 6. *Supongamos que $f : A \to B$. Si existe una función $g : B \to A$ tal que $g \circ f = i_A$ y $f \circ g = i_B$, entonces se dice que f es invertible, y decimos que la función g es la inversa de la función f. En simbolos*

$$g = f^{-1}$$

Teorema 4. *Una función $f : A \to B$ es invertible si y sólo si f es uno-uno y suprayectiva en B*

Demostración. ($\Rightarrow$)
Supongampos que f es invertible. Entonces existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = i_A$ y $f \circ g = i_B$, como i_A es uno-uno entonces $g \circ f$ es uno-uno por lo que f es uno-uno. Y como i_B es suprayectiva entonces $f \circ g$ es suprayectiva y por lo tanto f es suprayectiva.
($\Leftarrow$)
Supongamos que f es uno-uno y suprayectiva. Sea $b \in B$ como f es suprayectiva existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Al ser f uno-uno existe sólo hay un valor de a.
Definimos $g(b) = a$. Entonces para toda $a \in A$,

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a = i_A(a)$$

Para todo $b \in B$

$$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b = i_B(b)$$

Esto es $g \circ f = i_A$ y $f \circ g = i_B$. Por lo que f es ivertible. □