**Ejemplo** Vamos a probar que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, la función $f(x) = x^n$ es uno-uno (inyectiva) en el intervalo $(0, +\infty)$

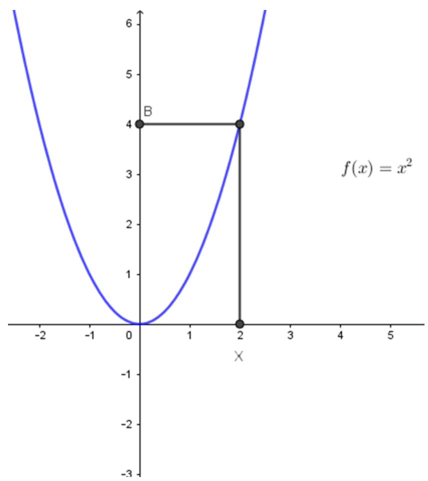
*Demostración.* Tenemos que

1. El caso $n = 1$ es trivial
2. Suponemos que $n \geq 2$ en $\mathbb{N}$, y consideremos la función $f(x) = x^n$ en $(0, +\infty)$. Supongamos que $a, b \in (0, +\infty)$ tal que $f(a) = f(b)$.
   Entonces

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Rightarrow a^n = b^n \\ &\Rightarrow a^n - b^n = 0 \\ &\Rightarrow (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = 0 \end{aligned}$$

   Como $a, b > 0$, el segundo factor no es cero. Por lo tanto, $a - b = 0$ y en consecuencia $a = b$ y f es inyectiva en $(0, +\infty)$

$\square$




## Raíz N-ésima

**Teorema 1.** *$\forall\ x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 0$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe un único $y \in \mathbb{R}$, y solo uno, tal que $y^n = x$ Este número $y$ se denota $\sqrt[n]{x}$, o $x^{\frac{1}{n}}$*

*Demostración.* Sea E el siguiente conjunto

$$E = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0 \ \ y \ \ t^n < x\}$$

Tenemos que $t = 0 \in E$ pues $0^n = 0 < x$ por lo tanto $E \neq \emptyset$.

Por otro lado vamos a demostrar un pequeño resultado por inducción

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ se\ \ satisface\ \ (x+1)^n > x$$

Primero comprobamos la base de inducción
n=1
Se tiene

$$x+1 > x$$

por tanto se cumple para $n = 1$
Vamos a suponer que la propiedad es válida para $n = k$, es decir

$$(x+1)^k > x$$

A partir de ahi se tiene

$$(x+1)^k > x \ \Rightarrow\ (x+1)^k(x+1) > x(x+1) = x^2 + x > x \ \Rightarrow\ (x+1)^{k+1} > x$$

y por lo tanto la propiedad es válida para $n = k+1$ en consecuencia la propiedad es válida $\forall\ n \in \mathbb{N}$
Ahora bien

$$Si\ \ t \geq (x+1)\ \ entonces\ \ t^n \geq (x+1)^n > x,\ \ por\ \ lo\ \ tanto\ \ t \notin E$$

de manera que $x+1$ es una cota superior de E. Por lo tanto

$$E \neq \emptyset\ \ y\ \ E\ \ esta\ \ acotado\ \ superiormente\ \ por\ \ x+1\ \ por\ \ tanto\ \ \exists\ \sup\ E = y$$

Este y es tal que $y^n = x$. □

La función anterior se suele denotar $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
Para $x \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f(x) = x^n$ es una función creciente. Ahora bien la función $g(x) = \sqrt[n]{x}$ es tal que

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[n]{x}) = f\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x$$

por otro lado

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^n) = \sqrt[n]{x^n} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{\frac{n}{n}} = x^1 = x$$

de manera que la función g es la función inversa de f.

**Corolario 1.** *Si a, b son números reales positivos y n es un entero positivo entonces*

$$(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$$

*Demostración.* Haciendo $x = a^{\frac{1}{n}},\ y = b^{\frac{1}{n}}$. Se tiene

$$a \cdot b = x^n y^n = (xy)^n \ \Rightarrow\ (ab)^{\frac{1}{n}} = x \cdot y = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}}$$

□