Exponentes Racionales

Definición 1. *Si* $x \neq 0$, *definimos* $x^0 = 1$.

Definición 2. *Si* $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ *y* m,n *no tienen factores primos en común, sea* $r = \dfrac{m}{n}$, *donde* m *y* n *son enteros positivos, se define*

$$x^r = x^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m \quad \textit{como el único} \quad (x^r)^n = x^m$$

es decir como la raíz n-ésima de x^m *siempre que ésta exista.*
Es decir existe un $y^n \in \mathbb{R}$ *tal que* $y^n = x^m$.

Teorema 1. *Sean* $a, b \in \mathbb{Q}$ *y* $r, s > 0$. *Entonces se cumple*

$$\begin{aligned} (1) \quad & r^{a+b} = r^a r^b \\ (2) \quad & (r^a)^b = r^{ab} \\ (3) \quad & (rs)^a = r^a s^a \end{aligned}$$

Demostración. Para (1) tomamos $m, p \in \mathbb{Q}$ y $n, q \in \mathbb{N}$ tal que $a = \dfrac{m}{n}$ y $b = \dfrac{p}{q}$. Entonces se tiene

$$a + b = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$$

por lo tanto r^{a+b} es el único número que satisface

$$(r^{a+b})^{nq} = r^{mq+np}$$

por otro lado

$$(r^a r^b)^{nq} = (r^a)^{nq}(r^b)^{nq} = ((r^a)^n)^q \left(\left(r^b\right)^q\right)^n \underbrace{=}_{\substack{r^a = r^{\frac{m}{n}} \Rightarrow (r^a)^n = r^m \\ r^b = r^{\frac{p}{q}} \Rightarrow (r^b)^q = r^p}} (r^m)^q (r^p)^n = r^{mq} r^{pn} = r^{mq+pn}$$

y por unicidad de la raíz n-ésima se tiene

$$r^a r^b = r^{a+b}$$

Para (2) tomamos $m, p \in \mathbb{Q}$ y $n, q \in \mathbb{N}$ tal que $a = \dfrac{m}{n}$ y $b = \dfrac{p}{q}$. Entonces se tiene

$$ab = \frac{m}{n}\frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$$

por lo tanto r^{ab} es el único número que satisface

$$(r^{ab})^{nq} = r^{mp}$$

por otro lado

$$((r^a)^b)^{nq} = (((r^a)^b)^q)^n \underbrace{=}_{r^b = r^{\frac{p}{q}} \Rightarrow (r^b)^q = r^p} (((r^a)^p)^n = (((r^a)^n)^p \underbrace{=}_{r^a = r^{\frac{m}{n}} \Rightarrow (r^a)^n = r^m} (r^m)^p = r^{mp}$$

y por unicidad de la raíz n-ésima se tiene
$$(r^a)^b = r^{ab}$$
Para (3) tomamos $m, p \in \mathbb{Q}$ y $n, q \in \mathbb{N}$ tal que $a = \dfrac{m}{n}$ y $b = \dfrac{p}{q}$. Entonces se tiene $(rs)^a$ es el único número que satisface
$$((rs)^a)^n = (rs)^m$$
por otro lado
$$(r^a s^a)^n = (r^a)^n (s^a)^n \underbrace{=}_{r^a = r^{\frac{m}{n}} \Rightarrow (r^a)^n = r^m} r^m s^m = (rs)^m$$
y por unicidad de la raíz n-ésima se tiene
$$(rs)^a = r^a s^a$$
□