Sucesiones (parte 1)

Una comprensión común e intuitiva de una secuencia (infinita) es que es una sucesión infinita de números no necesariamente diferentes

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots$$

Por supuesto, esto es simplemente una descripción sugerente. No puede servir como una definición rigurosa, ya que no define lo que se entiende por una sucesión infinita de números.
Otra forma intuitiva de describir una secuencia infinita es como un vector con infinitos componentes.

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots)$$

Nuevamente, esta descripción puede ayudarnos a sentirnos más cómodos con la noción de una secuencia, pero no puede ser una definición rigurosa ya que deja indefinidos los vectores y componentes.

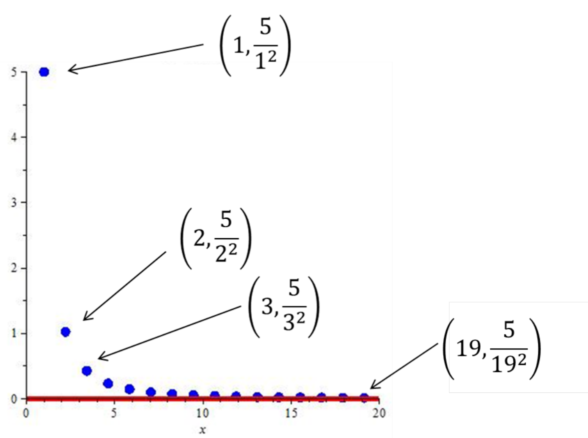
Definición 1. *Una sucesión de números reales es una función* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Es decir, dado cualquier número natural n, hay un número real correspondiente f (n).

Ejemplo Dada la sucesión $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(n) = \dfrac{5}{n^2}$. Se tiene para cada número natural n, los correspondientes números reales

$$5, \frac{5}{4}, \frac{5}{9}, \frac{5}{16}, \frac{1}{5}, \frac{5}{36}, \frac{5}{49}, \ldots$$

La gráfica de estos puntos se ve así

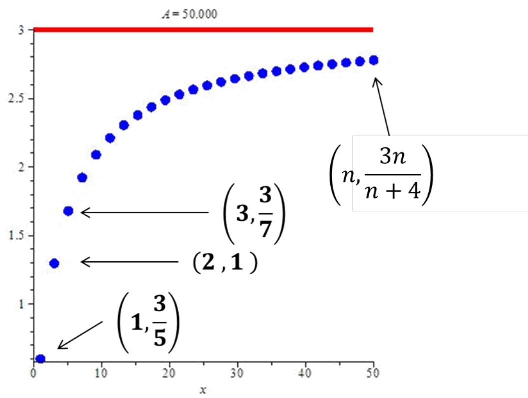


$$\left\{\frac{5}{n^2}\right\} = \left\{\frac{5}{1^2}, \frac{5}{2^2}, \frac{5}{3^2}, \ldots, \frac{5}{n^2}\right\}$$

Ejemplo Dada la sucesión $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(n) = \dfrac{3n}{n+4}$. Se tiene para cada número natural n, los correspondientes números reales

$$\left\{\frac{3n}{n+4}\right\} = \frac{5}{3}, 1, \frac{9}{7}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{9}{5}, \frac{21}{11}, 2, \frac{27}{3}, \ldots$$

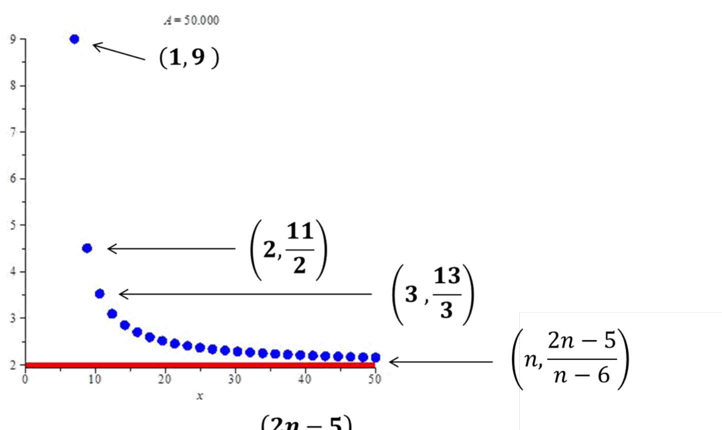
La gráfica de puntos se ve así



$$\{a_n\} = \left\{\frac{3n}{n+4}\right\}$$

Ejemplo Dada la sucesión $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(n) = \dfrac{2n-5}{n-6}$. Se tiene para cada número natural n, los correspondientes números reales

$$\left\{\frac{2n-5}{n-6}\right\} = 9, \frac{11}{2}, \frac{13}{3}, \frac{15}{4}, \frac{17}{5}, \frac{19}{6}, 3, \frac{23}{8}, \frac{25}{9}, \ldots$$

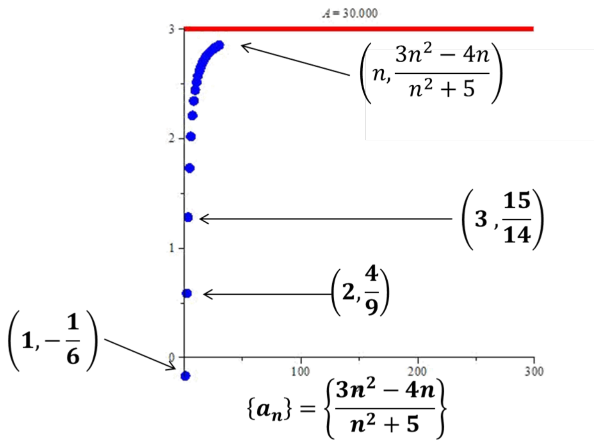


$$\{a_n\} = \left\{\frac{2n-5}{n-6}\right\}$$

Ejemplo Dada la sucesión $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $f(n) = \dfrac{2n-5}{n-6}$. Se tiene para cada número natural n, los correspondientes números reales

$$= \left\{ \frac{3n^2 - 4n}{n^2 + 5} \right\} = -\frac{1}{6}, \frac{4}{9}, \frac{15}{14}, \frac{32}{21}, \frac{11}{6}, \frac{84}{41}, \frac{119}{54}, \ldots$$

La gráfica de puntos se ve así



Comentarios y algunas convenciones Tenemos que

1. Llamaremos a_n el enésimo término de la secuencia.
2. En lo sucesivo, siempre escribiremos el enésimo término como a_n, utilizando la notación de subíndice en lugar de la notación funcional f (n)
3. La seucesión en sí será denotada $\{a_n\}$, u ocasionalmente $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
4. Todas las sucesiones contienen infinitos términos, no será necesario llamarlas sucesiones infinitas. Simplemente los llamamos sucesiones
5. Las convenciones (2) y (3) juntas hacen rigurosa la visión intuitiva de una secuencia $\{a_n\}$ como una sucesión infinita de números,

$$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots\}$$

6. Debemos tener cuidado de no dejar que la notación con llaves nos induzcan a pensar que estamos hablando de un conjunto de números.
   Por ejemplo, las secuencias $\{1\}$ consisten en infinitos términos, cada uno de los cuales equivale a 1. Usamos la misma notación $\{1\}$ en ambos casos; el contexto determinará a qué interpretación nos referimos.

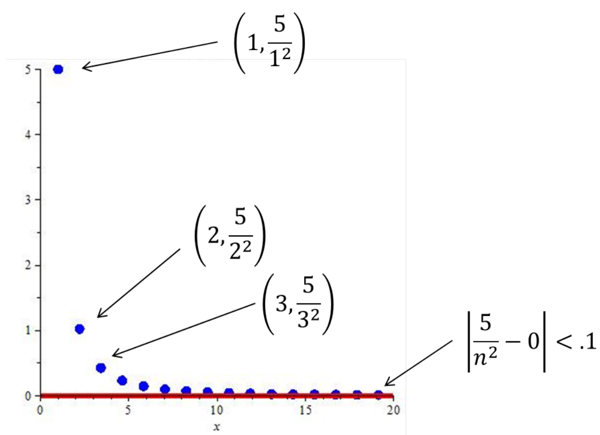
Ejemplo Los primeros seis términos de la sucesión $\left\{ 2 + \dfrac{(-1)^n}{n} \right\}$ son

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{5}{2},\ a_3 = \frac{5}{3},\ a_4 = \frac{9}{4},\ a_5 = \frac{9}{5},\ a_6 = \frac{13}{6}$$

Convergencia de una Sucesion

El concepto más importante asociado con las secuencias es el de convergencia a un límite. Intuitivamente, cuando decimos que una sucesión a_n converge a un límite L, queremos decir que a medida que n se hace más y más grande, sin límite, los términos a_n de la sucesión se acercan al número L; de manera equivalente, la distancia entre a_n y L, que medimos por $|a_n - L|$, es menor que cualquier número real positivo. Si trazamos la función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ en un sistema de coordenadas con un eje horizontal n y un eje vertical y (donde y $= a_n$), entonces el enunciado que a_n converge para limitar L es equivalente a decir que este gráfico tiene la línea horizontal y $=$ L como asíntota.

Ejemplo La sucesión $\left\{\frac{5}{n^2}\right\}$ geométricamente se acerca a la asintota $y = 0$

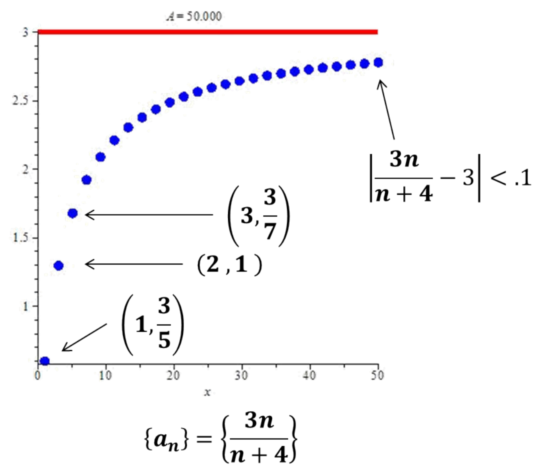


$$\left\{\frac{5}{n^2}\right\} = \left\{\frac{5}{1^2}, \frac{5}{2^2}, \frac{5}{3^2}, \dots, \frac{5}{n^2}\right\}$$

es decir para vales n suficientemente grandes

$$\left|\frac{5}{n^2} - 0\right| < \epsilon$$

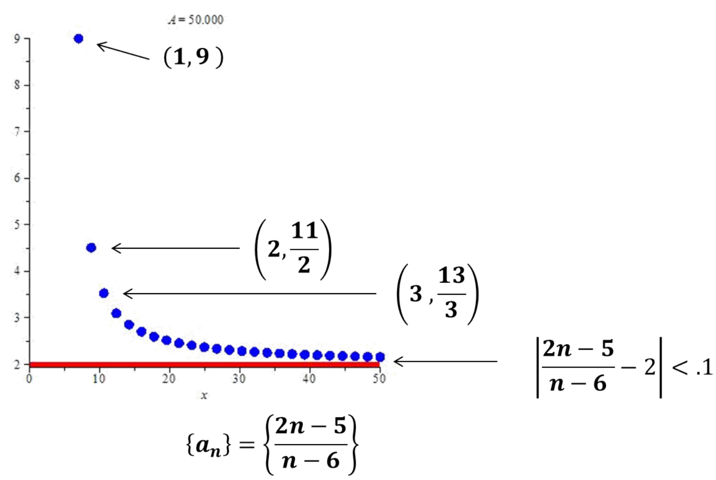
Ejemplo La sucesión $\left\{\frac{3n}{n+4}\right\}$ geométricamente se acerca a la asintota $y = 3$



es decir para vales n suficientemente grandes

$$\left|\frac{3n}{n+4} - 3\right| < \epsilon$$

Ejemplo La sucesión $\left\{\frac{2n-5}{n-6}\right\}$ geométricamente se acerca a la asintota $y = 2$



es decir para vales n suficientemente grandes

$$\left|\frac{2n-5}{n-6} - 2\right| < \epsilon$$