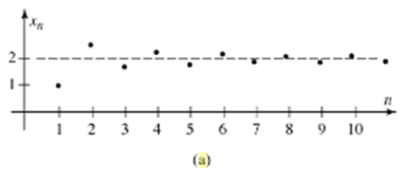
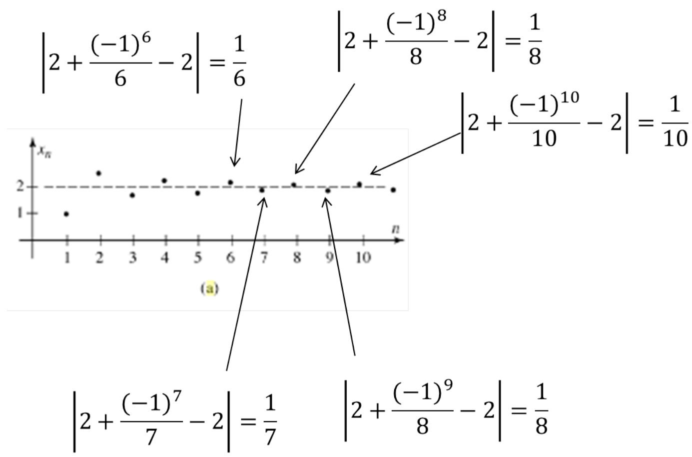
Limite de una Sucesion

Ejemplo Graficamos la sucesión $\{x_n\} = \left\{2 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ trazando la función $y = x_n$ en un sistema de coordenadas bidimensional.



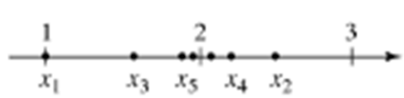
Observe en la figura que la línea horizontal $y = x_n$ es una asíntota.
Por lo tanto, decimos que la sucesión x_n converge al número 2 como su límite.



Es decir que para un número n suficientemente grande

$$\left|2 + \frac{(-1)^n}{n} - 2\right| < \epsilon$$

para alguna $\epsilon > 0$ pero suficientemente pequeña.
También podemos trazar los términos de la secuencia como puntos en una recta numérica, como en la figura, y observar que los términos sucesivos de la secuencia se agrupan alrededor del límite, 2.

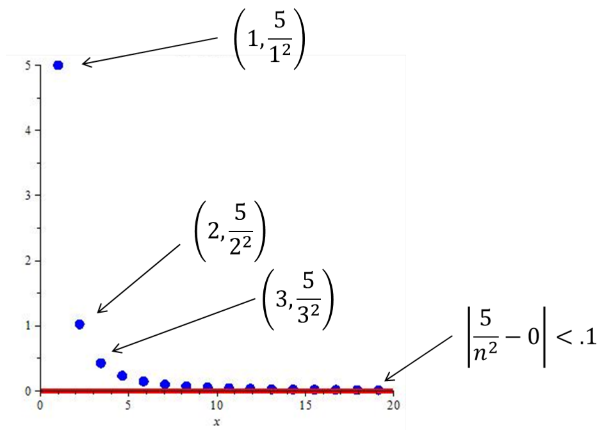


Definición 1. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión y L un número real. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \iff \forall\ \epsilon\ >\ 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \ni\ n \geq n_0\ \Rightarrow\ |x_n - L| < \epsilon$$

Ejemplo Dada la sucesión

$$\{a_n\} = \left\{\frac{5}{n^2}\right\} = \{5, \frac{5}{4}, \frac{5}{9}, \frac{5}{16}, \frac{1}{5}, \frac{5}{36}, \frac{5}{49}, ...\}$$



$$\left\{\frac{5}{n^2}\right\} = \left\{\frac{5}{1^2}, \frac{5}{2^2}, \frac{5}{3^2}, \dots, \frac{5}{n^2}\right\}$$

En la gráfica de los puntos de la sucesión, observamos que $a_n \to 0$ y nos preguntamos para cual $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\left|\frac{5}{n^2} - 0\right| < ,1$$

en nuestro ejemplo tenemos que:

$$\left|\frac{5}{n^2} - 0\right| = \left|\frac{5}{n^2}\right| = \frac{5}{n^2}$$

por lo que

$$\frac{5}{n^2} < ,1\ \Rightarrow\ \frac{5}{,1} < n^2\ \Rightarrow\ 50 < n^2\ \Rightarrow\ \sqrt{50} < n\ \Rightarrow\ 7{,}07 < n$$

asi que para $n \in \mathbb{N}$ tal que $7{,}07 < n$ se cumple

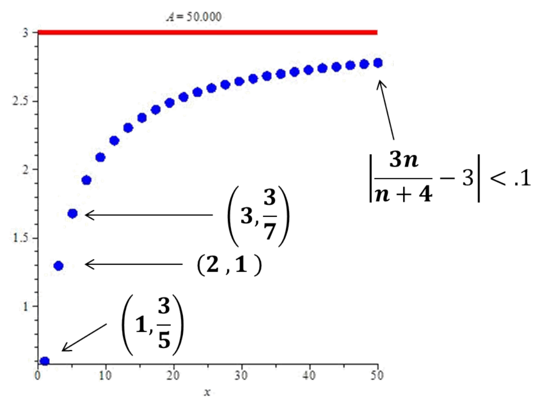
$$\left|\frac{5}{n^2} - 0\right| < ,1$$

Con la definición tenemos que para $n_0 = 8 \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeña

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} = 0\ \Leftrightarrow\ \forall\ \epsilon\ >\ 0,\ \exists\ n_0 = 8 \in \mathbb{N},\ \ni\ n \geq n_0\ \Rightarrow\ \left|\frac{5}{n^2} - 0\right| < \epsilon$$

Ejemplo Dada la sucesión

$$\{a_n\} = \left\{\frac{3n}{n+4}\right\} = \left\{\frac{5}{3}, 1, \frac{9}{7}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{9}{5}, \frac{21}{11}, 2, \frac{27}{3}, \ldots\right\}$$



$$\{a_n\} = \left\{\frac{3n}{n+4}\right\}$$

En la gráfica de los puntos de la sucesión, observamos que $a_n \to 3$ y nos preguntamos para cual $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\left|\frac{3n}{n+4} - 3\right| < ,1$$

en nuestro ejemplo tenemos que:

$$\left|\frac{3n}{n+4} - 3\right| = \left|\frac{3n - 3(n+4)}{n+4}\right| = \left|\frac{-12}{n+4}\right| = \frac{12}{n+4}$$

por lo que

$$\frac{12}{n+4} < ,1 \;\Rightarrow\; \frac{12}{,1} < n+4 \;\Rightarrow\; 120 < n+4 \;\Rightarrow\; 116 < n$$

asi que para $n \in \mathbb{N}$ tal que $116 < n$ se cumple

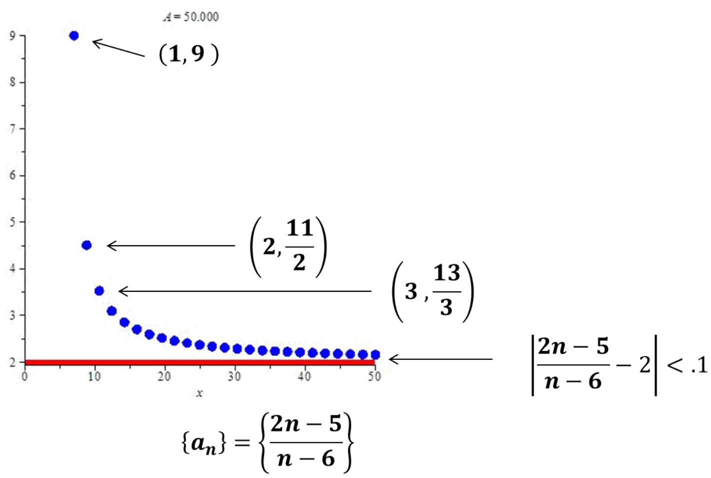
$$\left|\frac{3n}{n+4} - 3\right| < ,1$$

Con la definición tenemos que para $n_0 = 116 \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeña

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+4} = 3 \;\Leftrightarrow\; \forall\, \epsilon \;>\; 0,\; \exists\, n_0 = 116 \in \mathbb{N}, \;\ni\; n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \left|\frac{3n}{n+4} - 3\right| < \epsilon$$

Ejemplo Dado el conjunto

$$\{a_n\} = \left\{\frac{2n-5}{n-6}\right\} = \left\{9, \frac{11}{2}, \frac{13}{3}, \frac{15}{4}, \frac{17}{5}, \frac{19}{6}, 3, \frac{23}{8}, \frac{25}{9}, ...\right\}$$



En la gráfica de los puntos de la sucesión, observamos que $a_n \to 2$ y nos preguntamos para cual $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\left|\frac{2n-5}{n-6} - 2\right| < ,1$$

en nuestro ejemplo tenemos que:

$$\left|\frac{2n-5}{n-6} - 2\right| = \left|\frac{2n-5-2(n-6}{n-6}\right| = \left|\frac{7}{n-6}\right| = \frac{7}{n-6}$$

por lo que

$$\frac{7}{n-6} < ,1 \;\Rightarrow\; \frac{7}{,1} < n-6 \;\Rightarrow\; 70 < n-6 \;\Rightarrow\; 76 < n$$

asi que para $n \in \mathbb{N}$ tal que $76 < n$ se cumple

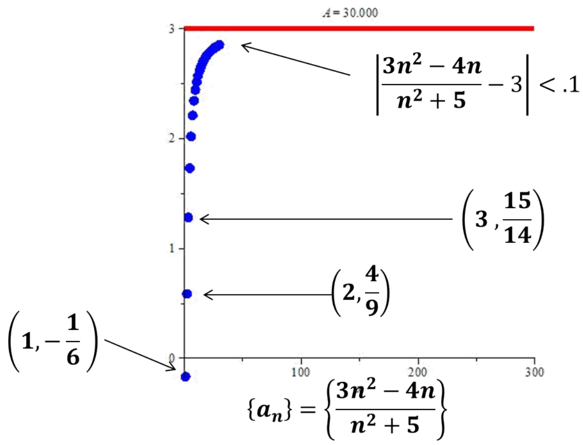
$$\left|\frac{2n-5}{n-6} - 2\right| < ,1$$

Con la definición tenemos que para $n_0 = 76 \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeña

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-5}{n-6} = 2 \;\Leftrightarrow\; \forall\, \epsilon \;>\; 0,\; \exists\, n_0 = 76 \in \mathbb{N}, \;\; \ni\; n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \left|\frac{3n}{n+4} - 2\right| < \epsilon$$

Ejemplo Dado el conjunto

$$\{a_n\} = \left\{\frac{3n^2-4n}{n^2+5}\right\} = \left\{-\frac{1}{6}, \frac{4}{9}, \frac{15}{14}, \frac{32}{21}, \frac{11}{6}, \frac{84}{41}, \frac{119}{54}, \ldots\right\}$$



En la gráfica de los puntos de la sucesión, observamos que $a_n \to 3$ y nos preguntamos para cual $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\left|\frac{3n^2-4n}{n^2+5} - 3\right| < ,1$$

en nuestro ejemplo tenemos que:

$$\left|\frac{3n^2-4n}{n^2+5} - 3\right| = \left|\frac{-4n-15}{n^2+5}\right| = \left|\frac{4n}{n^2+5}\right| = \frac{4n+15}{n^2+5}$$

por lo que

$$\frac{4n+15}{n^2+5} < ,1 \;\Rightarrow\; \frac{4n+15}{,1} < n^2+5 \;\Rightarrow\; 0 < n^2-40n-145 \;\Rightarrow\; 43,3 < n$$

asi que para $n \in \mathbb{N}$ tal que $43{,}3 < n$ se cumple

$$\left|\frac{3n^2-4n}{n^2+5} - 3\right| < ,1$$

Con la definición tenemos que para $n_0 = 44 \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeña

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4n}{n^2+5} = 3 \;\Leftrightarrow\; \forall\, \epsilon \;>\; 0,\; \exists\, n_0 = 44 \in \mathbb{N},\;\; \ni\; n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \left|\frac{3n^2-4n}{n^2+5} - 3\right| < \epsilon$$

Ejemplo Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} = 0$$

Demostración. En este caso necesitamos demostrar que

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, \quad tal \quad que \quad n_0 \leq n \ \Rightarrow \ \left|\frac{5}{n^2} - 0\right| < \epsilon$$

En este caso se tiene

$$\begin{aligned} \left|\frac{5}{n^2} - 0\right| < \epsilon \ &\Leftrightarrow \ \left|\frac{5}{n^2}\right| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \ \frac{5}{n^2} < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \ \frac{5}{\epsilon} < n^2 \\ &\Leftrightarrow \ \sqrt{\frac{5}{\epsilon}} < n \end{aligned}$$

Proponemos entonces $n_0 = \sqrt{\frac{5}{\epsilon}}$. Por lo que

$$\begin{aligned} n_0 \leq n \ &\Rightarrow \ \sqrt{\frac{5}{\epsilon}} < n \\ &\Rightarrow \ \frac{5}{\epsilon} < n^2 \\ &\Rightarrow \ \frac{5}{n^2} < \epsilon \\ &\Rightarrow \ \left|\frac{5}{n^2} - 0\right| < \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} = 0$$

□

Ejemplo Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+4} = 0$$

Demostración. En este caso necesitamos demostrar que

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \ tal\ \ que\ \ n_0 \leq n\ \Rightarrow\ \left|\frac{3}{n+4} - 0\right| < \epsilon$$

En este caso se tiene

$$\begin{aligned} \left|\frac{3}{n+4} - 0\right| < \epsilon &\Leftrightarrow \left|\frac{3}{n+4}\right| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{n+4} < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{\epsilon} < n+4 \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{\epsilon} - 4 < n \end{aligned}$$

Proponemos entonces $n_0 = \frac{3}{\epsilon} - 4$. Por lo que

$$\begin{aligned} n_0 \leq n &\Rightarrow \frac{3}{\epsilon} - 4 < n \\ &\Rightarrow \frac{3}{\epsilon} < n+4 \\ &\Rightarrow \frac{3}{n+4} < \epsilon \\ &\Rightarrow \left|\frac{3}{n+4} - 0\right| < \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+4} = 0$$

□

Ejemplo Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n}{n^2+3} = 0$$

Demostración. En este caso necesitamos demostrar que

$$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \ tal\ \ que\ \ n_0 \leq n\ \Rightarrow\ \left| \frac{7n}{n^2+3} - 0 \right| < \epsilon$$

En este caso se tiene

$$\begin{aligned}
\left| \frac{7n}{n^2+3} - 0 \right| < \epsilon \ &\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ \left| \frac{7n}{n^2+3} \right| < \epsilon \\
&\Leftrightarrow\ \frac{7n}{n^2+3} < \epsilon \\
&\Leftrightarrow\ \frac{7n}{n^2+3} < \frac{7n}{n^2} < \epsilon \\
&\Leftrightarrow\ \frac{7}{n} < \epsilon \\
&\Leftrightarrow\ \frac{7}{\epsilon} < n
\end{aligned}$$

Proponemos entonces $n_0 = \frac{7}{\epsilon}$. Por lo que

$$\begin{aligned}
n_0 \leq n \ &\Leftrightarrow\ \frac{7}{\epsilon} < n \\
&\Leftrightarrow\ \frac{7}{n} < \epsilon \\
&\Leftrightarrow\ \frac{7n}{n^2} < \epsilon \\
&\Leftrightarrow\ \frac{7n}{n^2+3} < \frac{7n}{n^2} < \epsilon \\
&\Leftrightarrow\ \frac{7n}{n^2+3} < \epsilon \\
&\Leftrightarrow\ \left| \frac{7n}{n^2+3} - 0 \right| < \epsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n}{n^2+3} = 0$$

□