Límites de funciones

Como recordarán, la idea de los límites de la función subyace en todos los temas del cálculo. Sin una comprensión de los límites, los conceptos de derivada e integral no pueden hacerse rigurosos. Por lo tanto, el tema es de importancia fundamental. Lo que puede ser una nueva idea para usted es que la teoría de las sucesiones juega un papel importante en la teoría de los límites de las funciones.

Nuestra primera tarea es definir el concepto. Para ayudar a que nuestra definición tenga sentido, reflexionamos un poco sobre la noción intuitiva de límite. Primero, una palabra sobre notación. Para indicar que f es una función de valor real con dominio $D(f)$, escribimos $f : D(f) \to \mathbb{R}$. Recuerde que al hablar del límite a medida que x se acerca a x_0, no nos importa realmente que exista el valor de $f(x_0)$.

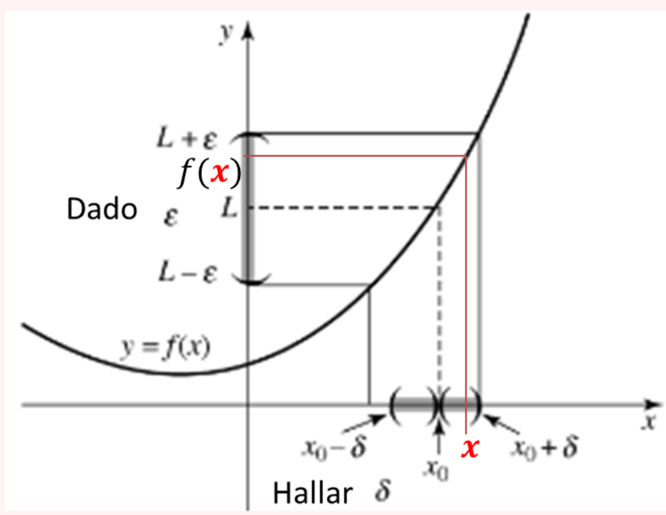
Solo nos preocupamos por f (x) para valores de x cercanos a x_0. Por lo tanto, no requerimos que x_0 esté en el dominio de f. Pero sí requerimos que x_0 sea un punto de agrupación del dominio; de lo contrario, los valores de x en el dominio de f no podrían acercarse a x_0.

Punto de agrupación Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. Se dice que x es un punto de agrupación de A si para todo intervalo de x, se tiene que, $(x-\delta, x+\delta) \cap\ A \neq \emptyset$

Ahora, decir que f (x) se acerca a L es decir que $|f(x) - L|$ se hace pequeño. Del mismo modo, decir que x se acerca a x_0 es decir que $|x - x_0|$ se vuelve pequeño sin igualar 0. Ahora, estamos listos para la definición

Definición 1. *Sea $f : D(f) \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in D(f)$. Se dice que un número real L es un límite de f en x_0 si, dada cualquier intervalo $(L-\epsilon, L+\epsilon)$ de L, existe un intervalo $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ de x_0 tal que si $x \neq x_0$ es un punto cualquiera de $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, entonces $f(x) \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$ y se denota*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$



Ejemplo Usando la definición muestre que

$$\lim_{x\to 2} x+1 = 3$$

Solución En este caso se tiene que $f(x) = x+1$, $x_0 = 2$ y $L = 3$. Por lo que

$$\begin{aligned} f(x) \in (3-\epsilon, 3+\epsilon) &\Leftrightarrow x+1 \in (3-\epsilon, 3+\epsilon) \\ &\Leftrightarrow 3-\epsilon < x+1 < 3+\epsilon \\ &\Leftrightarrow 3-\epsilon-1 < x < 3+\epsilon-1 \\ &\Leftrightarrow 2-\epsilon < x < 2+\epsilon \\ &\Leftrightarrow x \in (2-\epsilon, 2+\epsilon) \end{aligned}$$

De manera que si tomamos $(\delta = \epsilon)$ tenemos

$$\begin{aligned} f(x) \in (3-\epsilon, 3+\epsilon) &\Leftrightarrow f(x) \in (3-\delta, 3+\delta) \\ &\Leftrightarrow x+1 \in (3-\delta, 3+\delta) \\ &\Leftrightarrow 3-\delta < x+1 < 3+\delta \\ &\Leftrightarrow 3-\delta-1 < x < 3+\delta-1 \\ &\Leftrightarrow 2-\delta < x < 2+\delta \\ &\Leftrightarrow x \in (2-\delta, 2+\delta) \end{aligned}$$

De manera que para cualquier intervalo $(3-\epsilon, 3+\epsilon)$ de $L = 3$ con $\epsilon > 0$ arbitrario, existe un intervalo $(2-\delta, 2+\delta)$ de $x_0 = 2$ con $\delta > 0$ tal que

$$x+1 \in (3-\epsilon, 3+\epsilon) \Leftrightarrow x \in (2-\delta, 2+\delta)$$

Ejemplo Usando la definición muestre que

$$\lim_{x\to 2} 3x-1 = 5$$

Solución En este caso se tiene

$$f(x) \in (5-\epsilon, 5+\epsilon) \Leftrightarrow 3x-1 \in (5-\epsilon, 5+\epsilon) \Leftrightarrow 5-\epsilon < 3x-1 < 5+\epsilon \Leftrightarrow 5-\epsilon+1 < 3x < 5+\epsilon+1$$

$$\Leftrightarrow 6-\epsilon < 3x < 6+\epsilon \Leftrightarrow 2-\frac{\epsilon}{3} < x < 2+\frac{\epsilon}{3}$$

De esta manera podemos tomar $\delta = \dfrac{\epsilon}{3}$ es decir

$$f(x) \in (5-\epsilon, 5+\epsilon) \Leftrightarrow 3x-1 \in (5-\epsilon, 5+\epsilon) \Leftrightarrow 5-\epsilon < 3x-1 < 5+\epsilon \Leftrightarrow 5-\epsilon+1 < 3x < 5+\epsilon+1$$

$$\Leftrightarrow 6-\epsilon < 3x < 6+\epsilon \Leftrightarrow 2-\frac{\epsilon}{3} < x < 2+\frac{\epsilon}{3} \Leftrightarrow 2-\delta < x < 2+\delta \Leftrightarrow x \in (2-\delta, 2+\delta)$$