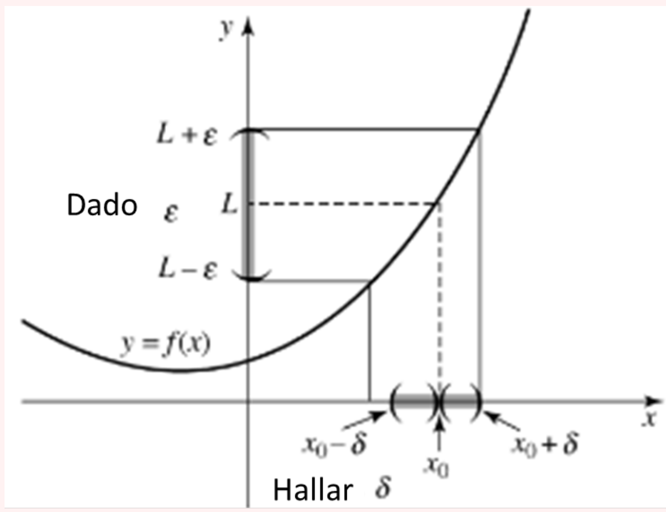
Límites de funciones ($\epsilon - \delta$)

Decir que f (x) se acerca a L es decir que $|f(x) - L|$ se hace pequeño. Del mismo modo, decir que x se acerca a x_0 es decir que $|x - x_0|$ se vuelve pequeño sin igualar 0. Ahora, estamos listos para la definición.

Definición 1. *Si $f : D(f) :\to \mathbb{R}$ y x_0 es un punto de agrupamiento de $D(f)$, entonces*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \;\Leftrightarrow\; \forall\, \epsilon > 0,\; \exists\, \delta > 0 \;\ni\; \forall\, x \in\; D(f),\; 0 < |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon$$



Notas de la definición Tenemos que

1. Si $\exists\, L \in \mathbb{R} \;\ni\; \lim_{x \to x_0} f(x) = L$, nosotros decimos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ existe; en otro caso decimos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ no existe
2. Nunca diremos que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe a menos que x_0 sea un punto de agrupación de D (f). Por ejemplo
$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^3 - x^2}$$
no existe ya que el dominio de esta función es $D(f) = \{0\} \cup [1, \infty)$ y 0 no es punto de agrupamiento del dominio de la función
3. Incluso si x_0 en D (f), el valor de $f(x_0)$ es irrelevante para la consideración de si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. La condición $0 < |x - x_0|$ en la definición garantiza que no estamos dejando que $x = x_0$
4. En realidad hay un tercer cuantificador aquí. Se entiende que el cuantificador universal en x está presente, incluso cuando se omite en aras de la simplicidad.

Ejemplo Considere el siguiente limite

$$\lim_{x\to 2}(4x-5)=3$$

1. Encuentre un valor $\delta>0$ que garantice que siempre que x esté dentro de una distancia δ de 2 (pero no igual a 2) $4x-5$ esté dentro de una distancia 0.1 de 3.
2. Encuentre un valor $\delta>0$ que garantice que siempre que x esté dentro de una distancia δ de 2 (pero no igual a 2) $4x-5$ se aproximará el límite con precisión a 3 decimales
3. Para $\epsilon>0$ arbitraria, encuentre un valor $\delta>0$ que garantice que siempre que x esté dentro de una distancia δ de 2 (pero no igual a 2) $4x-5$ esté dentro de una distancia ϵ de 3.

Solución Nosotros queremos un numero real $\delta>0$ tal que

1. $$0\;<\;|x-2|\;<\;\delta\;\Rightarrow\;|f(x)-3|\;<\;0{,}1$$

   Tenemos que

   $$\begin{aligned}|f(x)-3|&=|(4x-5)-3|\\&=|4x-8|\\&=4|x-2|\end{aligned}$$

   Por lo tanto, nuestro objetivo es encontrar un $\delta>0$ tal que

   $$0\;<\;|x-2|\;<\;\delta\;\Rightarrow\;4|x-2|\;<\;0{,}1$$

   La última desigualdad será verdadera si $|x-2|\;<\;\dfrac{0{,}1}{4}=,0025$. Por lo tanto, tomamos $\delta=,0025$.

2. Esta vez, queremos un número real $\delta>0$ tal que

   $$0\;<\;|x-2|\;<\;\delta\;\Rightarrow\;|f(x)-3|\;<\;0{,}0005$$

   Por lo tanto, nuestro objetivo es encontrar un $\delta>0$ tal que

   $$0\;<\;|x-2|\;<\;\delta\;\Rightarrow\;4|x-2|\;<\;0{,}0005$$

   La última desigualdad será verdadera si $|x-2|\;<\;\dfrac{0{,}0005}{4}=,000125$. Por lo tanto, tomamos $\delta=,000125$.

3. Sea $\epsilon>0$. Esta vez, queremos un número real $\delta>0$ tal que

   $$0\;<\;|x-2|\;<\;\delta\;\Rightarrow\;|f(x)-3|\;<\;\epsilon$$

   Por lo tanto, nuestro objetivo es encontrar un $\delta>0$ tal que

   $$0\;<\;|x-2|\;<\;\delta\;\Rightarrow\;4|x-2|\;<\;\epsilon$$

   La última desigualdad será verdadera si $|x-2|\;<\;\dfrac{\epsilon}{4}$. Por lo tanto, tomamos $\delta=\dfrac{\epsilon}{4}$.

Ejemplo Use la definición de limite para demostrar que

$$\lim_{x\to 2} 4x-5=3$$

Solución buscando una δ adecuada Para esto se tiene que

$$|f(x)-L|=|4x-5-3|=|4x-8|=|4(x-2)|=|4||x-2|$$

por lo tanto

$$|f(x)-L|<\epsilon \;\Rightarrow\; |4||x-2|<\epsilon \;\Rightarrow\; |x-2|<\frac{\epsilon}{4}$$

Demostración. Sea $\epsilon>0$. Elegimos $\delta=\dfrac{\epsilon}{4}$ entonces

$$\begin{aligned} 0<|x-2|<\delta \;&\Rightarrow\; |x-2|<\delta \\ &\Rightarrow\; |x-2|<\frac{\epsilon}{4} \\ &\Rightarrow\; 4|x-2|<\epsilon \\ &\Rightarrow\; |4x-8|<\epsilon \\ &\Rightarrow\; |(4x-5)-3|<\epsilon \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to 2} 4x-5=3$$

□

Ejemplo Use la definición de limite para demostrar que

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-18}{x-3}=12$$

Solución buscando una δ adecuada Para esto se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x)-L| &= \left|\frac{2x^2-18}{x-3}-12\right| = \left|\frac{2(x^2-9)}{x-3}-12\right| = \left|\frac{2(x+3)(x-3)}{x-3}-12\right| = |2x+6-12| \\ &= |2(x-3)| = 2|x-3| \end{aligned}$$

por lo tanto

$$|f(x)-L|<\epsilon \;\Rightarrow\; 2|x-3|<\epsilon \;\Rightarrow\; |x-3|<\frac{\epsilon}{2}$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Elegimos $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$ entonces

$$\begin{aligned} 0 < |x-3| < \delta \ &\Rightarrow \ |x-3| < \frac{\epsilon}{2} \\ &\Rightarrow \ 2|x-3| < \epsilon \\ &\Rightarrow \ |2x-6| < \epsilon \\ &\Rightarrow \ |2x+6-12| < \epsilon \\ &\Rightarrow \ \left|\frac{2x^2-18}{x-3} - 12\right| < \epsilon \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2-18}{x-3} = 12$$

□

Ejemplo Use la definición de limite para demostrar que

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

Solución buscando una δ adecuada Para esto se tiene que

$$|f(x) - L| = \left|x^2 - 4\right| = |(x+2)(x-2)| = |x+2|\,|x-2|$$

por lo tanto

$$|f(x) - L| < \epsilon \ \Rightarrow \ |x+2|\,|x-2| < \epsilon$$

El razonamiento utilizado aquí probablemente será nuevo para usted; seguirlo de cerca, supongamos que tenemos $\delta \leq 1$ entonces

$$\begin{aligned} 0 \ < \ |x-2| \ < \delta \ &\Rightarrow \ |x-2| < 1 \\ &\Rightarrow \ -1 < x-2 < 1 \\ &\Rightarrow \ 1 < x < 3 \\ &\Rightarrow \ 3 < x+2 < 5 \\ &\Rightarrow \ -5 < 3 < x+2 < 5 \\ &\Rightarrow \ -5 < x+2 < 5 \\ &\Rightarrow \ |x+2| < 5 \end{aligned}$$

entonces cuando $|x-2| < 1$ se tiene que $|x+2| < 5$. Recuerda que queremos

$$|x+2|\ |x-2| \ < \ \epsilon$$

Por lo tanto, además de $|x-2| < 1$, queremos $|x-2| < \dfrac{\epsilon}{5}$ para garantizar

$$|x+2|\ |x-2| \ < 5\ \frac{\epsilon}{5} = \epsilon$$

Por lo tanto elegimos $\delta = \text{mín}\left\{1, \dfrac{\epsilon}{5}\right\}$.

Tenemos ahora que

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Elegimos $\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\epsilon}{5}\right\}$ entonces

$$\begin{aligned} 0 < |x-2| < \delta &\Rightarrow |x-2| < 1 \quad y \quad |x-2| < \frac{\epsilon}{5} \\ &\Rightarrow -1 < x-2 < 1 \quad y \quad |x-2| < \frac{\epsilon}{5} \\ &\Rightarrow 3 < x+2 < 5 \quad y \quad |x-2| < \frac{\epsilon}{5} \\ &\Rightarrow |x+2| < 5 \quad y \quad |x-2| < \frac{\epsilon}{5} \\ &\Rightarrow |x+2|\,|x-2| < 5\,\frac{\epsilon}{5} = \epsilon \\ &\Rightarrow \left|x^2-4\right| < \epsilon \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$$

□