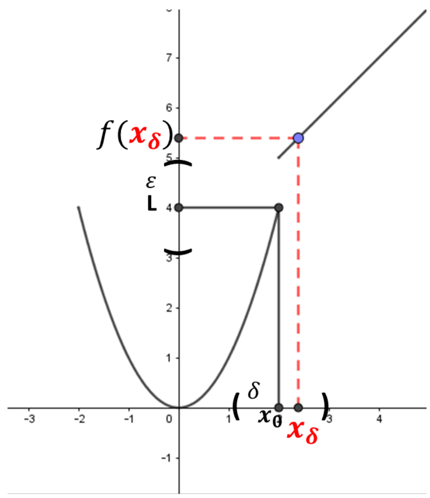
Negación de la definición de Límites de funciones

Lema 1. *Una función f no tiene limite L en x_0 si y solo si*

$$\exists\ \epsilon\ >\ 0\ \ tal\ \ que\ \ \forall\ \delta\ >\ 0\ \ \exists\ x_\delta \in\ Dom_f\ \ tal\ \ que\ \ 0 < |x_\delta - x_0| < \delta\ \ y\ \ |f(x_\delta) - L| \geq \epsilon$$



Demostración. Una función f no tiene limite L en $x_0 \Leftrightarrow$

$$es\ \ falso\ \ (\ \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \ tal\ \ que\ \ \forall\ x \in\ Dom_f,\ \ con\ \ 0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \epsilon\ )$$

Esto es

$$\Leftrightarrow\ \exists\ \epsilon > 0\ \ tal\ \ que\ \ es\ \ falso\ \ (\exists\ \delta > 0\ \ tal\ \ que\ \ \forall\ x \in\ Dom_f,\ \ con\ \ 0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \epsilon\ )$$
$$\Leftrightarrow\ \exists\ \epsilon > 0\ \ tal\ \ que\ \ \forall\ \delta > 0\ \ es\ \ falso\ \ (\ \forall\ x \in\ Dom_f,\ \ con\ \ 0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \epsilon\ )$$
$$\Leftrightarrow\ \exists\ \epsilon > 0\ \ tal\ \ que\ \ \forall\ \delta > 0\ \ \exists\ x \in\ Dom_f\ \ tal\ \ que\ \ es\ \ falso\ \ (\ \ 0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \epsilon\ )$$
$$\Leftrightarrow\ \exists\ \epsilon > 0\ \ tal\ \ que\ \ \forall\ \delta > 0\ \ \exists\ x \in\ Dom_f\ \ tal\ \ que\ \ 0 < |x - x_0| < \delta\ \ pero\ \ |f(x) - L| \geq \epsilon$$

$\square$

Ejemplo Muestre que

$$f(x) = \frac{1}{x} \;\; no \;\; tiene \;\; limite \;\; en \;\; x_0 = 0$$

Solución Según la negación de la definición, debemos mostrar que

$$\exists\ \epsilon > 0 \;\; tal \;\; que \;\; \forall\ \delta > 0 \;\; \exists\ x \in \;\; Dom_f \;\; tal \;\; que \;\; 0 < |x - x_0| < \delta \;\; pero \;\; |f(x) - L| \geq \epsilon$$

Vamos a proceder de la siguiente manera

a) Como x debe acercarse a 0 proponemos $x = \frac{\delta}{2}$. Con esta x, se tiene

$$|x - 0| = |x| = \left|\frac{\delta}{2}\right| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

es decir x esta cercana a cero, en símbolos $|x - 0| < \delta$.

b) Ahora con esta x se tiene

$$|f(x) - L| = \left|\frac{1}{x} - L\right| = \left|\frac{1}{\frac{\delta}{2}} - L\right| = \left|\frac{2}{\delta} - L\right| > \frac{\left|\frac{2}{\delta} - L\right|}{2}$$

c) Si tomamos $\epsilon = \frac{\left|\frac{2}{\delta} - L\right|}{2}$, entonces $\forall\ \delta > 0$ existe $x = \frac{\delta}{2} \in \;\; Dom_f$ tal que

$$|x - 0| < \delta \;\; pero \;\; |f(x) - L| \geq \epsilon$$

Por lo tanto

$$f(x) = \frac{1}{x} \;\; no \;\; tiene \;\; limite \;\; en \;\; x_0 = 0$$

Ejemplo Muestre que

$$f(x) = \frac{1}{x-a} \ \ no \ \ tiene \ \ limite \ \ en \ \ x_0 = a$$

Solución Según la negación de la definición, debemos mostrar que

$$\exists \ \epsilon > 0 \ \ tal \ \ que \ \ \forall \ \delta > 0 \ \ \exists \ x \in \ \ Dom_f \ \ tal \ \ que \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \ pero \ \ |f(x) - L| \geq \epsilon$$

Vamos a proceder de la siguiente manera

a) Como x debe acercarse al número a proponemos $x = a + \dfrac{\delta}{2}$. Con esta x, se tiene

$$|x - a| = \left| a + \frac{\delta}{2} - a \right| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

es decir x esta cercana al número a, en símbolos $|x - a| < \delta$.

b) Ahora con esta x se tiene

$$|f(x) - L| = \left| \frac{1}{x-a} - L \right| = \left| \frac{1}{a + \frac{\delta}{2} - a} - L \right| = \left| \frac{2}{\delta} - L \right| > \frac{\left| \frac{2}{\delta} - L \right|}{2}$$

c) Si tomamos $\epsilon = \dfrac{\left| \frac{2}{\delta} - L \right|}{2}$, entonces $\forall \ \delta > 0$ existe $x = a + \dfrac{\delta}{2} \in \ Dom_f$ tal que

$$|x - a| < \delta \ \ pero \ \ |f(x) - L| \geq \epsilon$$

Por lo tanto

$$f(x) = \frac{1}{x-a} \ \ no \ \ tiene \ \ limite \ \ en \ \ x_0 = a$$