Límites Infinitos

Definición 1. *Supongamos $f : D(f) \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de agrupamiento de $D(f)$. Entonces*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad si \quad \forall M > 0 \ \exists\, \delta > 0 \ \ni \ \forall \ x \in D(f), \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow f(x) > M$$

Ejemplo Mostrar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Solución *Demostración.* Necesitamos hallar un $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - 0| < \delta \ \Rightarrow \ \frac{1}{x^2} > M$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} > M &\Rightarrow \frac{1}{M} > x^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{M}} > x \end{aligned}$$

Podemos proponer entonces $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$, por tanto con esta δ se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 < |x - 0| < \delta \ &\Rightarrow \ |x - 0| < \frac{1}{\sqrt{M}} \\ &\Rightarrow \ |x| < \frac{1}{\sqrt{M}} \\ &\Rightarrow \ |x|^2 < \frac{1}{M} \\ &\Rightarrow \ |x^2| < \frac{1}{M} \\ &\Rightarrow \ x^2 < \frac{1}{M} \\ &\Rightarrow \ M < \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\forall M > 0 \ \exists\, \delta > 0 \ \ni \ \forall \ x \in D(f), \ \ 0 < |x - 0| < \delta \ \Rightarrow \frac{1}{x^2} > M$$

y por tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$\square$

Definición 2. *Supongamos $f : D(f) \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de agrupamiento de $D(f)$. Entonces*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \quad si \quad \forall M > 0 \ \exists \quad \delta > 0 \quad \ni \quad \forall x \in D(f),\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$$

Ejemplo Pruebe que

$$\lim_{x \to 2} \frac{1-x}{(x-2)^2} = -\infty$$

Solución En este caso tenemos que

$$f(x) < -M \ \Rightarrow \ \frac{1-x}{(x-2)^2} < -M \ \Rightarrow \ \frac{x-1}{(x-2)^2} > M \ \ \Rightarrow (x-1) \cdot \frac{1}{(x-2)^2} > M$$

Si suponemos $\delta = \frac{1}{2}$, entonces se tiene que

$$0 < |x-2| < \delta \ \Rightarrow \ 0 < |x-2| < \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ -\frac{1}{2} < x - 2 < \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ \frac{1}{2} < x - 1$$

ahora necesitamos que

$$(1-x) \cdot \frac{1}{(x-2)^2} > M \ \ tenemos \ \ (1-x) \cdot \frac{1}{(x-2)^2} > \frac{1}{2} \cdot k, \ debe\ ocurrir\ \frac{1}{2} \cdot k = M \ \Rightarrow \ k = 2M$$

esto es

$$\frac{1}{(x-2)^2} > 2M \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{2M} > (x-2)^2 \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{2M} > \left|(x-2)^2\right| \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{2M} > |x-2|^2 \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{\sqrt{2M}} > |x-2|$$

Sea $M > 0$ y de esta manera elegimos $\delta = \text{mín}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2M}}\right\}$, por tanto se tiene

$$\begin{aligned}
0 < |x-2| < \delta \ &\Rightarrow \ 0 < |x-2| < \frac{1}{2} \quad y \quad 0 < |x-2| < \frac{1}{\sqrt{2M}} \\
&\Rightarrow \ \frac{1}{2} < x - 1 \quad y \quad 2M < \frac{1}{(x-2)^2} \\
&\Rightarrow \ M = \frac{1}{2} \cdot 2M < \frac{x-1}{(x-2)^2} \\
&\Rightarrow \ -M > \frac{1-x}{(x-2)^2}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{x \to 2} \frac{1-x}{(x-2)^2} = -\infty$$