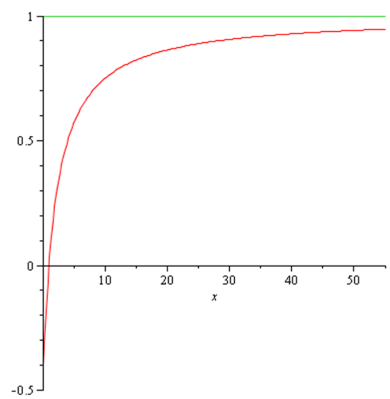
Límites en el Infinito

Definición 1. *Sea $A \subset \mathbb{R}$, sea $f : A \to \mathbb{R}$. Se dice que $L \in \mathbb{R}$ es límite de f cuando $x \to \infty$ y se escribe*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad si \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \quad N > 0 \quad \ni \quad \forall x \in Dom_f,\ x > N \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \epsilon$$

Ejemplo Mostrar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$$



Demostración. Tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{2}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 1$$

para comprobarlo usamos la definición primero se tiene que:

$$\left|\frac{x-1}{x+2} - 1\right| = \left|\frac{x-1-(x-2)}{x+2}\right| = \left|\frac{-3}{x+2}\right| = \frac{3}{x+2} < \frac{3}{x}$$

por lo que

$$\frac{3}{x} < \epsilon \Rightarrow \frac{3}{\epsilon} < x \quad \therefore \quad N = \frac{3}{\epsilon}$$

de esta manera, si $\epsilon > 0$ elegimos $N = \dfrac{3}{\epsilon}$ por lo que

$$x > N \ \Rightarrow\ x > \frac{3}{\epsilon} \ \Rightarrow\ \frac{3}{x+2} < \frac{3}{x} < \epsilon \ \Rightarrow\ \left|\frac{-3}{x+2}\right| < \epsilon \ \Rightarrow\ \left|\frac{x-1}{x+2} - 1\right| < \epsilon$$

por lo tanto

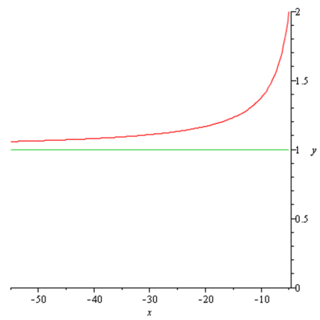
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$$

□

> **Definición 2.** *Sea $A \subset \mathbb{R}$, sea $f : A \to \mathbb{R}$. Se dice que $L \in \mathbb{R}$ es límite de f cuando $x \to -\infty$ y se escribe*
>
> $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \quad si \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \quad N > 0 \quad \ni \quad \forall x \ \in \ Dom_f, \ x < -N \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \epsilon$$

Ejemplo Mostrar que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$$



Demostración. Tenemos que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{2}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 1$$

para comprobarlo usamos la definición primero se tiene que:

$$\left| \frac{x-1}{x+2} - 1 \right| = \left| \frac{x - 1 - (x-2)}{x+2} \right| = \left| \frac{-3}{x+2} \right|$$

como $x \to -\infty$ se toma $x < -2$ por lo que $x + 2 < 0$ y por lo tanto $-(x+2) > 0$, de esta manera

$$\left| \frac{-3}{x+2} \right| = \left| \frac{3}{-(x+2)} \right| = \frac{3}{|-(x+2)|} = \frac{3}{-(x+2)}$$

por lo que

$$\frac{3}{-(x+2)} < \epsilon \Rightarrow \frac{3}{\epsilon} < -x - 2 \ \Rightarrow \ \frac{3}{\epsilon} + 2 < -x \ \Rightarrow \ -\left(\frac{3}{\epsilon} + 2 \right) > x$$

de esta manera, si $\epsilon > 0$ elegimos $N = \dfrac{3}{\epsilon} + 2$ por lo que

$$x < -N \ \Rightarrow \ x < -\left(\frac{3}{\epsilon} + 2 \right) \ \Rightarrow \ -x-2 > \frac{3}{\epsilon} \ \Rightarrow \ \frac{3}{-(x+2)} < \epsilon \ \Rightarrow \ \left| \frac{-3}{x+2} \right| < \epsilon \ \Rightarrow \ \left| \frac{x-1}{x+2} - 1 \right| < \epsilon$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x+2} = 1$$

□